

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

DIMENSIONAMENTO E LOCALIZAÇÃO DE CENTRO DE  
DISTRIBUIÇÃO DE CORREIOS NUMA CIDADE DE MÉDIO PORTE

ALTAMIR ANTÔNIO ROSA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PARA OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA.



FLORIANÓPOLIS, MAIO DE 1996

UFSC-BU



**DIMENSIONAMENTO E LOCALIZAÇÃO DE CENTRO DE  
DISTRIBUIÇÃO DE CORREIOS NUMA CIDADE DE MÉDIO PORTE**

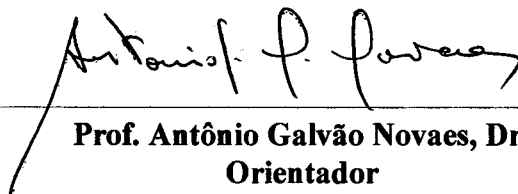
**ALTAMIR ANTÔNIO ROSA**

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção

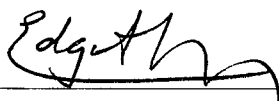


**Prof. Ricardo Miranda Barcia, Ph. D.**  
**Coordenador do Programa de Pós-Graduação**

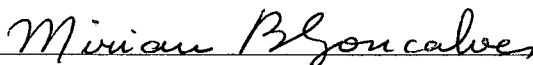
Banca Examinadora :



**Prof. Antônio Galvão Novaes, Dr.**  
**Orientador**



**Prof. Edgar Augusto Lanzer, Ph. D.**



**Prof. Mirian Buss Gonçalves, Dr.**

Dedico este trabalho à memória de meus avós: Maria Umbelina Xavier Branco e Vítor Xavier Rosa. Dedico, também, a minha mãe Maria dos P. Xavier Rosa, e aos meus filhos Rafael e Ana Paula.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço:

,de modo todo especial, a Deus!

- A meu orientador, Dr. Antônio Galvão Novaes, pelo zelo a minha tarefa, amizade e confiança a mim dedicados;

- À Banca Examinadora, pelas críticas e sugestões;

- Ao Instituto de Planejamento e Urbanismo de Florianópolis-SC (IPUF), principalmente por ter fornecido a planta da cidade de Florianópolis desenhada em computador.

- A Ivan Vieira, meu ex-aluno de Geometria Descritiva na UFSC, pelos conhecimentos do software “MacroStation” a mim transmitidos;

- A Antônio Carlos da Silva, pelos conhecimentos da Linguagem Pascal e pelos conhecimentos de Informática de modo geral a mim prestados;

- A Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), com respeito aos Srs. Celso Silva de Carvalho (Gerente de Operações e Logística), Rosemberg Lucas da Silva (Subgerente de Logística); Wilson Leoni Lemos (Chefe Seção de Otimização Operacional);

- A José Aparecido Canassa, colega deste Curso de Mestrado, por ter sido o primeiro a incentivar minha proposta de trabalho junto a empresa ECT na qual trabalha como gerente da parte financeira.

- Aos funcionários do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção, em especial pelos funcionários da Secretaria pelo atendimento e carinho que recebi;

Aos colegas de curso e a todos, que, sinceramente, torceram por mim.

# Dimensionamento e Localização de Centro de Distribuição de Correios numa Cidade de Médio Porte.

## Resumo

Este trabalho apresenta dois enfoques pertinentes à problemática vivida pela Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), nas cidades de médio e/ou grande porte, quando do dimensionamento (número) e localização de suas unidades de entrega denominadas CDD (Centro de Distribuição Domiciliada).

Estes enfoques são: O Problema “MINI-SUM” (caso clássico da determinação das P-Medianas) e o Problema de Partição de Conjuntos (“The Set Partitioning Problem”) o qual é uma “pequena” variação do Problema de Cobertura de Conjunto (“The Set Covering Problem”), ambos dentro de um contexto maior da literatura conhecido como Teoria dos Grafos.

O primeiro destes enfoques tratará da determinação de **P**-lugares para a localização destes CDDs de tal forma a minimizar o percurso médio ponderado dos carteiros desde os CDDs até suas regiões de entrega. O segundo “Approach” deverá apenas mostrar como determinar o menor número **P** de lugares para a localização dos CDDs de tal forma que estes cubram (atendam) a área total da cidade composta por todas as regiões de entrega, respeitando-se restrição de percurso e demais recomendações da Empresa.

Para ambos os enfoques, algoritmos e heurísticas apropriados serão apresentados. Para o problema “MINI-SUM” (P-Medianas) será implementado o algoritmo da Substituição de Vértices, e além disso será desenvolvido um Aplicativo para marcar e gerar uma matriz de distâncias num mapa da cidade já desenhado em computador. E para o Problema de Cobertura nos restringiremos apenas em descrever um dos dois métodos (ou procedimentos) heurísticos: um implementado em computador é descrito e dado exemplo; e o outro executado manualmente apenas é mencionado a fonte onde o mesmo pode ser encontrado.

Os dois enfoques serão comparados, de maneira a estabelecer um paralelo entre os mesmos. E a finalidade deste paralelo é o de propiciar à ECT a possibilidade de optar por um destes enfoques que podem não ser os únicos, mas são diferentes.

Todavia, estes enfoques, enquanto aplicação, estão inseridos dentro de um contexto mais amplo da ECT que é o de um Sistema de Distribuição onde custos e demais restrições precisam ser considerados - e esta é a problemática a qual nos referimos no início desta exposição.

Mais precisamente, o objetivo geral deste trabalho seria determinar, em ambos os enfoques, o número e localização ótimos dos CDDs mas não em detrimento destes custos e restrições. Não obstante, como já foi dito anteriormente apenas a abordagem “Mini-sum” (P-Medianas) será aplicada de fato no Problema de Localização de CDDs da empresa ECT, isto quando da execução do algoritmo da Substituição de Vértices implementado em computador.

Para aplicação dos resultados obtidos, foi escolhida a cidade de Florianópolis-SC por se encontrar mais próxima do autor. Desta forma o acesso aos dados não fica tão prejudicado.

# SUMÁRIO

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1-Introdução .....	1
1.2 - Uma breve digressão sobre enfoques ligados aos problemas de localização .....	3
1.3 - Considerações finais sobre o Capítulo 1 .....	10

## CAPÍTULO 2 - Características do Sistema de Distribuição da ECT

2.1 - Conceitos e terminologias da ECT .....	11
2.1.1 - CEP (Código de Endereçamento Postal) .....	11
2.1.2 - Distrito (de carteiro) .....	11
2.1.3 - CDD (Centro de Distribuição Domiciliada) .....	12
2.1.4 - Circunscrição .....	12
2.1.5 - O Sistema de Distritamento (SD) .....	12
2.1.6 Triagem .....	13
2.1.7 - Distribuição Própria (Qp): Demanda .....	14
2.2 - O Sistema de Distribuição da ECT numa cidade de médio e/ou grande porte .....	15
2.3 - Os custos no Sistema de Distribuição: Uma breve análise de custos .....	17
2.3.1 - Custo total de transferência .....	18
2.3.2 - Custo total de entrega local .....	18
2.3.3 - Custo total dos CDDs (da facilidade) .....	20
2.4 - Critérios da ECT para a escolha dos lugares viáveis à localização de CDDs .....	22
2.5 - Duas grandes restrições no Sistema .....	22
2.6 - Considerações finais sobre o Capítulo 2 .....	24

## CAPÍTULO 3 - Revisão Bibliográfica

### 3.1 Aspectos teóricos e revisão bibliográfica

sobre a teoria geral dos Grafos .....	27
3.1.1 Definições .....	27
3.1.1.1 - Grafos .....	27
3.1.1.2 - Arcos e arestas .....	27
3.1.1.3 - Grafos orientados, não-orientados e mistos .....	27
3.1.1.4 - Conexidade .....	28
3.1.1.5 - Vértices adjacentes .....	28
3.1.1.6 - Subgrafo .....	29
3.1.1.7 - Matriz de adjacência .....	29
3.1.1.8 - Grafo Ponderado .....	29
3.1.1.9 - Árvore .....	29
3.1.2 Representação de um grafo no computador .....	30
3.1.2.1 - Representação pela Matriz de Custos .....	30
3.1.2.2 - Representação por Lista de Aresta .....	31
3.2 Aplicações da teoria dos grafos .....	31
3.2.1 - <u>O Problema “Mini-sum” e a</u> <u>Localização de Medianas</u> .....	31
3.2.1.1 - Aplicações do problema da localização de medianas .....	32
3.2.1.2 - Lista de símbolos (Nomenclatura) e definições preliminares .....	33
3.2.1.3 - No. de transmissão: <u>out</u> -transmissão, <u>in</u> -transmissão e in-out -transmissão .....	34
3.2.1.4 - Medianas de G: <u>out</u> -medianas, <u>in</u> -medianas e <u>in-out</u> -medianas .....	34
3.2.1.5 - Medianas múltiplas: P -Medianas .....	39
3.2.1.6 - A Matriz “D” das menores distâncias e a abordagem do conjunto viável (ou finito) .....	40
3.2.1.7 - O conjunto $X_p$ e a abordagem do conjunto viável .....	41
3.2.1.8 - P-Medianas absoluta .....	42
3.2.1.9 - Generalização da p-medianas .....	43



3.2.1.10 - Métodos de resolução .....	44
3.2.1.10.1- Método da Enumeração Exaustiva ou Direta .....	44
3.2.1.10.2 - Método de Substituição de Vértices .....	45
3.2.1.10.3 - Formulação do Problema “Mini-sum” (P-Medianas) como um problema de Programação Inteira - um Método Exato .....	45
3.2.2 - <u>O Problema de Cobertura</u> .....	48
3.2.2.1 - Conceitos e definições preliminares .....	48
3.2.2.1.1 - <u>Cobertura</u> de um conjunto e <u>Partição</u> de um conjunto .....	48
3.2.2.1.2 - Conjunto dominante, Conjunto Dominante Minimal, número de dominância e o Conjunto Dominante Minimum .....	48
3.2.2.2 - O que é o Problema de Cobertura e o que são os Objetivos de Cobertura ? .....	50
3.2.2.2.1 - A matriz de Cobertura e o Problema de Cobertura .....	50
3.2.2.2.2 - <u>Conjunto Dominante</u> e o Problema de Cobertura de Conjunto .....	51
3.2.2.2.3 - Dois exemplos de Problema de Cobertura .....	52
3.2.2.3 - O Problema de Partição de Conjunto .....	54
3.2.2.3.1 - O Problema de Cobertura formulado como um Problema de Programação Linear .....	55
3.2.2.3.2 - Outro exemplo de Objetivo de Cobertura e alternativas para o Objetivo de Cobertura .....	56
3.2.2.3.3 Métodos de resolução do Problema de Partição de Conjunto .....	57
3.2.2.3.3.1 - Um método computacional .....	58
3.2.2.3.3.2 - Um método <u>não</u> computacional .....	61
3.3 Considerações finais sobre o Capítulo 3 .....	62

## CAPÍTULO 4 - Desenvolvimento de uma Aplicação Prática

4.1 - Aplicação dos enfoques na ECT: a busca de soluções para o problema de localização de CDDs .....	66
4.1.1 - Hipóteses básicas para ambos os enfoques .....	66
4.1.2 - Lugares viáveis para localização de CDDs .....	66
4.1.3 - Definições preliminares .....	67
4.1.3.1 - Centróide de um CEP .....	67
4.1.3.2 - Distância entre CEPs .....	67
4.1.3.2.1 - Definição de distância usada na abordagem “Mini-sum” (P-Medianas) .....	67
4.1.3.2.2 - Definição de distância usada na abordagem “Problema de Partição de Conjunto” .....	70
4.1.4 - <u>O Problema “Mini-sum” (P-Medianas) na ECT</u> .....	70
4.1.4.1 - A Matriz de distância (distâncias Euclidianas entre CEPs) .....	70
4.1.4.2 - A Matriz-T dos tempos entre CEPs ponderada, e o cálculo das P-Medianas .....	71
4.1.4.3 - Aplicação da abordagem “Mini-sum” (P-medianas) na cidade de Florianópolis-SC .....	72
4.1.4.3.1- Dois exemplos em tamanho reduzido: exemplos (a) e (b) .....	74
4.1.4.3.2 - A restrição sobre os CDDs .....	89
4.1.4.3.3 - O algoritmo .....	90
4.1.4.3.4 - Critério de parada na otimização .....	91
4.1.4.3.5 - Recursos computacionais envolvidos .....	91
4.1.4.3.5.1 - arquivos .....	93
4.1.4.3.6 -Os resultados computacionais da abordagem “Minisum” (P-medianas) na cidade de Florianópolis .....	96
4.1.5 - <u>O Problema de Partição de Conjunto na ECT</u> .....	98
4.1.5.1 - A Matriz de Cobertura do CEPs .....	100

ANEXO 6	Relação atual dos CDDs com suas respectivas circunscrições, isto é, os CEPs com seus distritos .....	155
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	.....	157

4.1.5.2 - Dois métodos para a resolução do Problema de Cobertura na localização de CDDs da .....	101
---	-----

## CAPÍTULO 5 - Conclusões e Sugestões

5.1 - Sugestões e considerações finais .....	102
5.1.1 - Sugestões .....	102
5.1.1.2 - Sugestões à ECT para o aproveitamento dos resultados ...	102
5.1.1.3 - Outras sugestões .....	102
5.2-Considerações finais .....	104

## ANEXOS

ANEXO 1	Teste de regressão linear realizado nas partes Ilha e Continente da cidade de Florianópolis para decidir quais das distâncias dE ou dR melhor aproxima a distância real “d”. Observação: Usou-se o software “EXCEL 5.0”. .....	107
ANEXO 2	O Programa P-Mediana (Método da Substituição de Vértices) implementado para resolver o Problema de Localização de CDDs da Empresa ECT. ....	110
ANEXO 3	Tela mostrando o ambiente do Aplicativo implementado através do SoftWare “MacroStation” para gerar a Matriz de Distâncias Euclidianas entre os CEPs. ....	147
ANEXO 4	Relatório com as soluções obtidas ao executar o programa P-Mediana (Método da Substituição de Vértices), quando da abordagem “Mini-sum” aplicada na cidade de Florianópolis/Continente. ....	149
ANEXO 5	Planta de logradouros da cidade em “escala reduzida”, onde a parte “achurada” representa a parte da Ilha cujas regiões de entrega estão faltando. ....	153

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - Introdução

A Empresa Brasileira de Correios e telégrafos (ECT) opera uma rede de unidades operacionais composta de Agências, Agências-Franquiadas, Centros Operacionais e, entre outras também, os Centros de Distribuição Domiciliada (CDDs) e os Centros de Triagem (CT).

Esta Empresa dispõe de metodologia própria no dimensionamento (número) e localização destas unidades. Porém, esta metodologia pode não ser a mais eficiente, já que ainda ocorrem diversos problemas junto a sua clientela e ainda com custo acima do esperado.

É projeto desta empresa a implantação de um sistema de triagem automatizada das correspondências que deverão então ser triadas somente no CT, em substituição à triagem manual que vem sendo realizada pelos carteiros no CT e também num dos CDDs. Esta mudança de atitude ressalta a necessidade de buscar instrumentos ou metodologias alternativas, agora, mais especificamente, para o dimensionamento e localização dos CDDs.

Para o dimensionamento e localização dos CDDs, e também para a divisão da área da cidade em circunscrições que são agrupamentos de regiões de entrega que por sua vez irão ser atendidas por um dos CDDs, é nossa proposta aqui oferecer a esta empresa duas sistemáticas do que na literatura que trata da Teoria dos Grafos são conhecidas como “O Problema de Cobertura de Conjunto” e “Mini-sum”(P-Medianas).

A política da Cobertura de Conjunto procura minimizar o número de CDDs (as facilidades) necessários para atender toda a cidade satisfazendo padrões de serviços rígidos (fixados, estabelecidos). Todavia com a adoção de tal política - a qual na

verdade, é a metodologia que a empresa ECT vem utilizando mesmo empiricamente - , um padrão de serviço poderia estar sendo comprometido. O percurso médio por carteiro, de ida e volta dos CDDs as suas regiões de entrega seria grande justamente por causa do número pequeno ou reduzido de CDDs que se conseguirá com esta política. Esta política, na verdade, estaria indiretamente minimizando custos através da alternativa de minimizar o número de facilidades. Esta alternativa obviamente somente seria válida com a garantia de ter-se o cumprimento de todos os padrões de serviços exigidos [20].

Por outro lado o objetivo da abordagem “Mini-sum” (P-Mediana) é o de minimizar o percurso médio dos carteiros de ida e volta dos CDDs as suas regiões de entrega. Não obstante, um destes percursos (ou tempo de viagem) para um certo carteiro individual pode ser muito grande comparado com o percurso médio, o que afetaria também os padrões de serviços.

De certa forma, aqui já foi estabelecido um paralelo entre as duas abordagens. E então, o que está reservado para os capítulos seguintes é o detalhamento destas duas abordagens com vistas a solução do problema de localização de CDDs - em particular, solução para a cidade de Florianópolis-SC.

Com respeito aos capítulos deste trabalho, sempre que necessário, comentários sob notas de rodapé serão feitos por vezes no sentido de enfatizar a existência de outras abordagens ou enfoques dentro da literatura que trata de problemas de localização, mas que são descartados por um ou outro motivo na busca de solução específica para o problema de localização de CDDs da empresa ECT.

## 1.2 Uma breve digressão sobre enfoques ligados a problemas de localização

O problema de abastecer algum número de destinos,  $n$ , por um número de origens,  $p$ , tem sido atacado com uma variedade de hipóteses e métodos. Se ambos, origens e destinos, são localizações fixas (conhecidas) com dadas quantidades disponíveis e requeridas, o problema de transporte padrão da programação linear aparece. Porém nem sempre esse é o caso, e quando são dadas somente as localizações para os destinos e em que se tem que encontrar as  $p$  localizações para as origens (as facilidades, por exemplo) o contexto é outro.

Na literatura científica, pesquisa sobre seleção de locais de facilidade tem sido focalizada sobre custos de transporte e distância de transporte. Esta linha de pesquisa começou em 1909 quando **Weber** colocou o seguinte problema: Dado um conjunto de localizações de fregueses  $\{(x_i, y_i)\}$  e um conjunto de demandas de fregueses  $\{Q_i\}$ , encontre a localização de uma facilidade central  $(x_o, y_o)$  que minimize a distância total viajada para satisfazer as demandas de fregueses. Isto é, encontrar a localização de uma facilidade central que minimize a seguinte expressão:

$$\sum_i Q_i \sqrt{(x_i - x_o)^2 + (y_i - y_o)^2}$$

Conhecido como o “problema de Weber”, a formulação acima é convexa com respeito a  $x_o$  e  $y_o$  (**Palermo, 1961**). Por este motivo o problema de **Weber** é fácil de otimizar com os clássicos métodos de otimização não-linear, tal como “gradient search”.

Problemas de localização de facilidade colocados nas pesquisas subsequentes não são tão fáceis de resolver. Por exemplo, uma questão mais difícil é a de encontrar as  $M$  localizações de facilidade ( $M > 1$ ) que minimize a distância total viajada. A correspondente função objetivo é não convexa. Por conseguinte, usuais métodos de otimização não-linear não garantem um ótimo global.

Para simplificar o processo de otimização, uma abordagem alternativa do conjunto finito tem sido usada. A abordagem do conjunto finito (ou viável. Ver **Eilon**[10]), <sup>1</sup> seleciona as melhores **M** facilidades de um conjunto de **N** ( $N > M$ ) lugares candidatos. Assim, esta abordagem evita a busca (pesquisa) sobre um conjunto contínuo de lugares potenciais. Uma motivação para a abordagem do conjunto finito vem de um artigo de **Hakimi** (1964). Ele mostrou que quando o problema de **M** facilidades é formulado sobre uma rede de transporte, solução ótima resultará em todas as facilidades localizadas sobre nós da rede. Portanto, encontrar um ótimo, é somente necessário pesquisar entre os nós.

**Hakimi** [17] considerou <sup>2</sup> duas categorias de problemas de localização que fazem parte de um problema de encontrar uma localização ótima para uma facilidade numa rede que envolve a seleção de uma localização central. Estas categorias de problemas são o problema de localização “Mini-max” e o problema de localização “Mini-sum”. O primeiro problema destes dois consiste em determinar um vértice **u** de um dado conjunto de vértices  $V(G)$  de grafo **G** (finito, conexo, não-orientado) de maneira que minimize a soma das máximas distâncias de **u** até todos os vértices deste grafo, isto é, que minimize a função

$$e(u) = \max \{d(u,v); v \in V(G)\};$$

o segundo destes dois problemas consiste em determinar um vértice  $u \in V(G)$  de maneira a minimizar a soma das distâncias de **u** até todos os vértices deste grafo, isto é, que minimize a função

$$D(u) = \sum (d(u,v); v \in V(G)).$$

---

<sup>1</sup> Ver também em **Eilon** [10] as vantagens e desvantagens das abordagens do Conjunto Finito ou Viável e da abordagem do Conjunto Infinito, descritas em seu livro. Não obstante, este mesmo autor usa a abordagem do Conjunto Infinito

<sup>2</sup> Subsequentes considerações de **Hakimi** [17] foram feitas em cima de muitos trabalhos incluindo os de **Goldman** (1971, 1972).



A função  $e(u)$  é chamada de excentricidade de  $u$ , e o subconjunto de vértices com mínima excentricidade é chamado de centro do grafo  $G$ . A função  $D(u)$  é a distância de  $u$  em  $G$ , e o subconjunto de vértices com mínima distância é chamado de mediana do grafo  $G$ .

Uma função objetivo alternativa para minimizar custo de transporte é minimizar o número de facilidades, sujeita a distância de transporte desde qualquer freguês até a facilidade mais próxima sendo menor do que algum valor máximo. Conhecido como o Problema de Cobertura de Conjunto, esta função objetivo tem sido usada em seleção de localização para postos de corpo de bombeiro e outras facilidades de emergência (**Plane e Hendrick, 1977; Walker, 1974**). A justificativa para o propósito da “cobertura de conjunto” vem da necessidade de se garantir que usuários de um determinado sistema recebam um certo mínimo de serviço nível. Além disso, pode ser desejo minimizar outros custos de operação. O problema de Cobertura de Conjunto proxima estes objetivos

O Problema de Cobertura de Conjunto tem sido estudado em muitos outros contextos do que teoria da localização, e muitos bons algoritmos de otimização tem sido desenvolvidos (por exemplo, **Garfinkel and Numhauser, 1969**). Pesquisa nesta área está resumida em **Christofides and Korman (1975)**, bem como em vários livros de programação inteira.

No artigo em **Berman [3]** são apresentadas duas abordagens: O “p maximal cover problem” é encontrar um conjunto de localizações para  $p$  facilidades de maneira a maximizar a demanda total (coberta) que está no máximo  $T$  unidades distante de uma facilidade mais próxima. Em outras palavras, o objetivo (finalidade) do “p maximal cover problem” é estabelecer  $p$  facilidades de maneira que maximize o número de fregueses que estão no máximo  $T$  unidades distante (máxima distância) de uma

facilidade mais próxima;<sup>3</sup> e o “p partial center problem” é encontrar um conjunto de localizações para  $p$  facilidades que minimize a distância máxima entre uma facilidade mais próxima e a demanda coberta. Mais precisamente, seja  $G = (N, L)$  uma rede com um conjunto de nós  $N$ , um conjunto de  $n$  números não-negativos  $\{h_i\}$  que representam frações da demanda ponderada nos nós ( $\sum h_i = 1$ ) e um conjunto  $L$  de ligações não-orientadas (arestas). Seja  $d_{ij}$  o comprimento de qualquer ligação  $(i, j)$  em  $L$  e  $d(z, y)$  a distância mais curta entre quaisquer dois pontos  $z, y$  em  $G$ . Denote-se por  $X_p$  um conjunto de localização de  $p$  facilidades em  $G$ . É definido o conjunto de cobertura  $N(T, X_p)$  como o conjunto de todos os nós em  $N$  que estão a uma distância de no máximo  $T$  de uma facilidade mais próxima em  $X_p$ , isto é,

$$N(T, X_p) = \{i \in N; d(i, X_p) \leq T\}, \text{ onde } d(i, X_p) = \min_{x \in X_p} \{d(i, x)\}.$$

O “p maximal cover problem” é encontrar um conjunto ótimo de localizações  $X_p^*$  tal que  $H(X_p)$ , a demanda total coberta, é maximizada, isto é,

$$H(X_p^*) = \max_{X_p \in G} \{H(X_p) = \sum_{i \in N(T, X_p)} h_i\}.$$

E o “p partial center Problem” é encontrar um conjunto ótimo de localizações  $X_p^*$  que minimize  $S(X_p)$  - a distância máxima entre  $X_p$  e a facilidade mais próxima em  $N(T, X_p)$ , isto é,

---

<sup>3</sup> Este problema foi introduzido por Church e Reville [6] onde a busca pelo conjunto ótimo de soluções está restrito ao conjunto de pontos de demanda (nós da rede). Num artigo posterior Church e Meadows [7] generalizaram a busca pelo conjunto ótimo de localizações para um conjunto dominante - ver o conceito de conjunto dominante no Capítulo 3 - de pontos NIPS (“Network Interest Point Set”) que inclui em adicionar aos nós também todos os pontos que estão  $T$  unidades de distância longe de qualquer ponto de demanda.

$$S(X_p^*) = \min_{X_p \in G} \{S(X_p) = \max_{i \in N(T, X_p)} d(i, X_p)\}.$$

**Observação:** define-se uma localização de Pareto  $X_p^0$  como um conjunto de localizações de  $p$  facilidades tal que não existe  $X_p \in G$  onde

$$H(X_p) > H(X_p^0) \text{ e } S(X_p) \leq S(X_p^0)$$

ou

$$S(X_p) < S(X_p^0) \text{ e } H(X_p) \geq H(X_p^0).$$

Ainda no artigo de **Berman** [3], é mostrado a relação entre estes dois problemas: basicamente o “ $p$  partial center problem” é introduzido para vencer uma limitação que o “ $p$  maximal cover problem” possui. Neste mesmo artigo, para o “1 maximal cover problem” sob uma árvore é apresentado um algoritmo para encontrar todas as localizações de Pareto com respeito a estes dois objetivos: “maximum cover” e “minimax distance”; Para uma rede qualquer é discutido o “ $p$  maximal cover problem” onde se requer que o conjunto ótimo de soluções são localizações de Pareto. É discutido o caso  $p > 1$  facilidades e uma heurística simples e eficiente é apresentada para resolver o “ $p$  maximal cover problem” formulado como um problema de programação inteira binária:

$$\max \sum_{i=1}^n h_i y_i$$

$$\text{sujeito a: } \sum a_{ij} x_j \geq y_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{k \in C} x_j = p,$$

$$x_j, y_j = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad j \in C.$$

Aqui,  $x_j$  e  $y_i$  são as variáveis de decisão;  $h_i \geq 0$  representa frações da demanda ponderada nos nós ( $\sum h_i = 1$ ) e  $a_{ij}$  ( $i \in N$ =número de nós,  $j \in C$ =conjunto de todas as localizações centrais) são parâmetros definidos por:

$x_j = 1$  se a facilidade é localizada em  $j$ ,  
 0 caso contrário,

$y_i = 1$  se o nó  $i$  é coberto por uma facilidade,  
 0 caso contrário,

$a_{ij} = 1$  se  $d(i,j) \leq T$ ,  
 0 caso contrário.

Observação:  $d(i,j)$  denota a distância de  $i$  até  $j$ .

O primeiro conjunto de restrições garante que se o nó não é coberto por nenhuma facilidade, então  $y_i = 0$  e juntamente com a função objetivo garantem que se o nó  $i$  é coberto por pelo menos uma facilidade, então  $y_i = 1$ . A segunda restrição assegura que  $p$  facilidades são localizadas.

Em Gupta (1989 e 1993), é usada uma partição dos nós - tanto para rede como para ávore - para definir o “Group Centre” e o “Group Median”. Esta idéia, além de generalizar respectivamente o problema “centro absoluto” (problema mini-max) e o problema “mediana” (problema mini-sum), pode ser usada para unificar os conceitos de centro absoluto e mediana. Basicamente, seja  $V$  o conjunto de  $n$  vértices e  $E$  o conjunto de arestas de um grafo  $G$  (conexo, não-direcionado e sem ciclos); seja ainda,  $d_{ij}$  a distância mais curta entre os vértices  $i$  e  $j$ , onde para cada vértice  $x$  em  $G$ ,  $d_j(x)$  denota o comprimento do caminho mais curto entre  $x$  e o vértice  $j$ ; <sup>4</sup> seja, também  $\{S_1, S_2, \dots, S_p\}$  uma partição qualquer de  $V$ . Consideremos os dois problemas abaixo:

---

<sup>4</sup> Em Hakimi [17] é mostrado que  $d_j(x)$  é uma função côncava linear-por-partes com no máximo duas partes lineares quando  $x$  está restrito a uma aresta.

$$(P1) \text{ Minimize } \left\{ \max_{x \in G} \left\{ \sum_{j \in S_i} d_j(x) \right\} \right\};$$

$$(P2) \text{ Minimize } \left\{ \sum_{i=1}^p \max_{j \in S_i} \{d_j(x)\} \right\};$$

O problema P1 é denominado de “group centre problem” e P2 de “group median problem”, com respeito à partição  $\{S_1, S_2, \dots, S_p\}$  e a rede ou árvore dados. P1 é o Problema de Mediana (absoluta) para  $p=1$  e é o Problema do Centro Absoluto para  $p=n$ . Similarmente, P2 é o Problema do Centro Absoluto para  $p=1$  e é o Problema de Mediana (absoluta) para  $p=n$ . E portanto cada um dos dois problemas P1 e P2, unifica o Problema de Mediana e o Problema do Centro Absoluto.

Nenhuma das abordagens acima pode completamente dar contas de todos os fatores que são importantes na seleção de facilidade - tais fatores são por exemplo: condições de acessibilidade.<sup>5</sup> Mesmo assim, os métodos são entretanto úteis. No problema de Weber, distância de transporte sempre é um razoável “proxy” para o verdadeiro custo. O Objetivo de Cobertura pode também ser um bom “proxy” para o verdadeiro custo. [20]

---

<sup>5</sup> Em outras situações que não a localização de CDDs para a empresa ECT, pode ser necessário levar em consideração uma lista enorme de fatores que são importante quando se deseja selecionar lugares para localização de facilidades. Segundo Hall [20], uma tal lista pode constar de: avaliar a distância de cada facilidade a abastecedores e consumidores; regras de zoniameto; disponibilidade do terreno para futuras expansões; proximidades a auto-estradas; impacto ambiental e etc. Todos estes itens desta lista, e muito mais pertinente a seleção de localizações de facilidade este mesmo autor recomenda (Fulton, 1971).

### 1.3 - Considerações finais sobre o Capítulo 1

Neste primeiro capítulo colocamos, já com mais detalhes do que no resumo, o objetivo deste trabalho: um estudo de caso com duas abordagens para o problema de localização dos Centros de Distribuição da empresa ECT. Além disso, fizemos uma breve digressão sobre outros enfoques ligados a problemas de localização, (seja de facilidades ou não) com dois propósitos: o primeiro, é o de mostrar ao leitor que os problemas de localização vêm de muito tempo a começar por **Weber**, e que muitas outras abordagens ou enfoques variados se sucederam até os dias de hoje; e o segundo, justamente para bem destacar dentre todos estes outros enfoques, nossas duas abordagens aqui neste trabalho - em notas de rodapé ou no final dos demais capítulos, às vezes são feitos comentários ou considerações sobre outras abordagens que por um ou outro motivo não poderiam ser aplicadas no problema de localização da empresa ECT.

## CAPÍTULO 2

### Características do Sistema de Distribuição da ECT

#### 2.1 - Conceitos e terminologias da ECT

##### 2.1.1 - CEP (Código de Endereçamento Postal)

Cada rua (ou logradouro) - ou trecho de rua, ou até mesmo um dos lados da rua - está incluída dentro de um grupo de outras ruas que possuem um código em comum para endereçamento de correspondência. Assim por exemplo, a rua ‘Marechal Câmara’ (toda) que se situa no bairro Estreito na cidade de Florianópolis-SC tem como código o número 88070.

Um conjunto de ruas que compartilha do mesmo código acaba dando origem a uma classe disjunta de endereçamento a qual recebe o nome de CEP.

##### 2.1.2 - Distrito (de carteiro)

Cada CEP é por sua vez subdividido em partes denominadas de distritos. Cada carteiro então fica responsável por um único distrito que é assim a sua região de entrega. Cada distrito recebe um número que é memorizado pelos carteiros. Este número não aparece no CEP da correspondência propriamente. Por exemplo, o CEP 88070 é subdividido em quatro distritos de entrega, a saber : 701, 702, 703 e 704. Pelo número do ponto de entrega do logradouro memorizado pelos carteiros e tendo a sua frente mapa dos distritos em separado , estes mesmos carteiros conseguem saber a qual dos distritos do CEP a correspondência está destinada.

### 2.1.3 - CDD (Centro de Distribuição Domiciliada)

É uma unidade operacional. É daqui que os carteiros saem para fazer a entrega a clientes individuais. É assim uma unidade de entrega por excelência, mas que presta serviço de atendimento no sentido de que os usuários podem procurá-la quando por exemplo do não recebimento de uma correspondência.

### 2.1.4 - Circunscrição

A área total da cidade é dividida em CEPs. E o conjunto de CEPs coberto (atendido) por um CDD é denominada de circunscrição.

### 2.1.5 - O Sistema de Distritamento (SD)

É um sistema informatizado criado pela ECT para realizar o distritamento. Um programa de computador escrito em linguagem “Clipper” procura ponderar diversas variáveis de interesse e obedecendo-se regras de decisão previamente estabelecidas.

Este sistema fornece por exemplo o coeficiente de rendimento de cada carteiro dentro do seu distrito, levando-se em consideração variáveis como por exemplo:

- ⇒ Tipo de logradouro, isto é, se este tem a forma de L, U ou Z;
- ⇒ se seu distrito está dentro de uma área residencial ou comercial;
- ⇒ se seu distrito está dentro de uma área plana ou elevada (características topográficas);



- ⇒ número médio de ponto de entrega ou parada por dia;
- ⇒ tempo médio entre paradas;
- ⇒ distância total média percorrida por dia dentro do distrito;
- ⇒ se o carteiro faz a entrega a pé, de bicicleta ou veículo motorizado (motocicleta);
- ⇒ o volume médio diário de correspondências (objetos, impressos, etc...) do distrito;

É este sistema que fixa o tempo médio em cada parada (a entrega) de 38 segundos.

É este sistema que calcula o número de supervisores para um CDD em função do número de carteiros baseado numa recomendação da ECT que designa um supervisor para cada 20 carteiros mais um supervisor para 15 carteiros adicionais. Assim, por exemplo para um CDD com 30 carteiros (os 20 carteiros, mais 10 adicionais que não chega ao número de 15) é designado apenas um supervisor; já para um CDD com 45 carteiros é designado dois supervisores, e assim por diante. Não obstante, cada CDD possui ainda um chefe.

#### **2.1.6 Triagem**

É a separação das correspondências para um determinado destino. Há dois estágios na triagem, a saber:

##### **a) Triagem por CEP:**

O destino das correspondências triadas são os CDDs (Centros de Distribuição Domiciliada) já que cada CDD cobre (atende) um conjunto de CEPs. Em

outras palavras, as correspondências são separadas apenas observado-se o número do CEP.

**b) Triagem por Distrito de Entrega:**

O destino das correspondências são os distritos de entrega. É o destino final das correspondências que são separadas agora, coletivamente pelos carteiros, por distritos. E depois, os carteiros individualmente fazem a separação por logradouros e ordenação de acordo com a sequência de números dos pontos de entrega nestes logradouros.

**2.1.7 - Distribuição Própria (Qp): Demanda**

Existem dois tipos de demanda no sistema de distribuição, quais sejam:

- A Distribuição Própria: É definida como sendo a fração de correspondências (objetos, impressos, etc...) da área total da cidade, isto é

$$Q_p = \frac{\text{No. de Objetos distribuídos}}{\text{No. Total de Objetos da Área}}$$

Assim, podemos pensar na distribuição própria de um distrito, de um CEP ou até mesmo de uma circunscrição. Esta demanda é aleatória, sendo adotada uma média (estatística) obtida pelo Sistema de Distritamento.

- Número de pontos de parada (clientes individuais): Tanto as paradas para entrega como as rotas são pré-determinadas cada dia pelo carteiro dentro de seu distrito.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Nem o número total de pontos potenciais de entrega e nem muito menos a localização de tasi pontos são conhecidos. Sendo assim, torna-se inviável pensar em adotar o modelo descrito no artigo de Rosenfield [35] que enfoca o problema de se determinar a abrangência das áreas de empresas prestadoras de serviços em geral e sua aplicação pelo Serviço Postal Norte Americano (SPNA), em particular: a chave para a abordagem é a relação

## 2.2 - O Sistema de Distribuição da ECT numa cidade de médio e/ou grande porte

Atualmente, existem as origens que são pontos da área geográfica por onde as correspondências (impressos, cartas, etc...) surgem. São por exemplo, um aeroporto, as próprias agências de postagem, etc...

Destas origens, o carregamento contendo as correspondências é levado para o que chamaremos de fontes. Estas fontes são o Centro de Triagem (CT) ou um dos CDDs chamado de CDD-mãe.

Nestas fontes se dá a triagem por CEP, ou mais precisamente a triagem para os demais CDDs. Após esta triagem, é feita a Transferência das correspondências para seus respectivos CDDs.

Uma vez a correspondência chegando aos CDDs, é feita coletivamente com os carteiros uma triagem por distrito (ou regiões de entrega) de carteiro. Finalmente, cada carteiro individualmente faz a separação das correspondências por logradouro e ordena-as com respeito à numeração dos domicílios (clientes).

Após a etapa final de triagem (serviço interno nos CDDs) é então realizada a entrega propriamente dita aos clientes pelo carteiro em seus respectivos distritos.

Não obstante, por recomendação da ECT, a existência de um CDD-mãe só se justifica quando há no máximo quatro (04) CDDs. Senão a triagem por CDD é feita somente pelo CT - tendo-se então apenas uma fonte no sistema.

---

entre o tempo de viagem (tempo improdutivo) e o número de circunscrições dentro de uma área servida por uma Agência Central (o CT, no caso da ECT) que faz a triagem automática para as unidades de entrega; o modelo determina o número e a localização dos locais de atendimento (unidades de entrega, no caso do SPNA) sustentado na hipótese de que paradas para entrega são uniformemente distribuídas sobre as circunscrições.

Outra recomendação - no trabalho que nos propomos esta será tida como uma restrição - da ECT diz que todo CDD deve ter no mínimo quinze (15) carteiros - é o que se denomina atualmente de CDD-Mínimo -, e que um número próximo a sessenta (60) carteiros - para nós, outra restrição que teremos que considerar - torna este CDD operacionalmente inviável. Assim, se num sistema há mais de quatro CDDs, um CDD-mãe eventualmente seria tal que além dos carteiros necessários para atender os seus distritos alocados, exigiria um número adicional muito grande de carteiros para dar conta da triagem para os demais CDDs. Em outras palavras, este CDD-mãe seria inviável pela grande quantidade de carteiros, justificando desta maneira o “por que” de no máximo quatro CDDs para ter-se um CDD-mãe.

Haja vista o interesse da ECT na automatização da triagem (por CDD) nas cidades de médio e grande porte, questionar a existência no sistema de um CDD-mãe obviamente não faz mais sentido. Toda correspondência deve ser triada num único lugar que é o CT, pois o objetivo da automatização é substituir de fato a triagem manual (por CDD) que consome muito tempo e envolve um número muito grande de carteiros no CDD-mãe e no CT, e concomitantemente, nos demais CDDs há ociosidade a espera das correspondências.

A **Fig.-1** apresenta um esquema <sup>2</sup> procurando representar melhor as componentes do Sistema Logístico de Distribuição para o problema da ECT.

---

<sup>2</sup> Figura em analogia ao Sistema de Distribuição Fábrica-Depósito-Freguês apresentada em Eilon [10], onde o problema é abastecer algum número fixo de destinos (os fregueses),  $n$ , por um número fixo de fontes (as fábricas),  $m$ , antes porém passando por depósito ou múltiplos depósitos com localizações a serem determinadas cumprindo-se determinadas hipóteses.

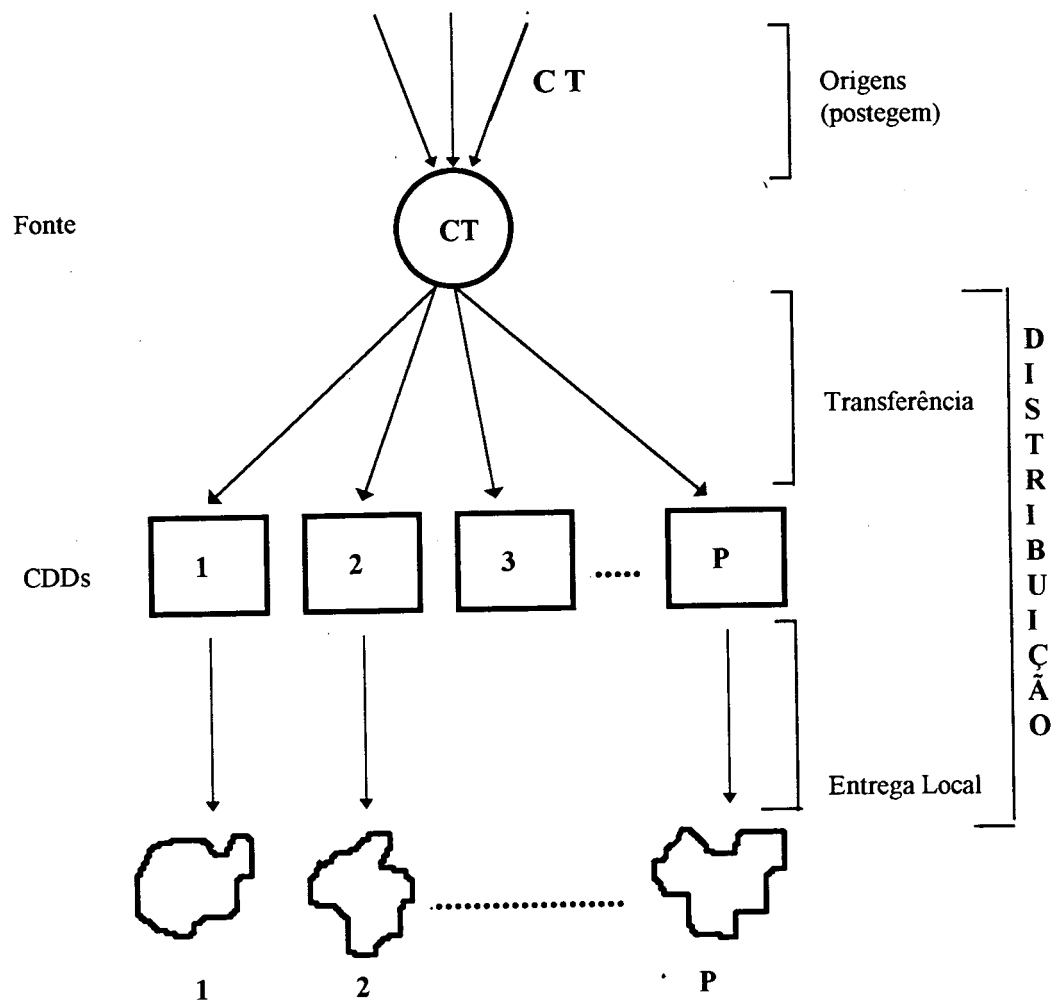


Fig.1 - Sistema Logístico

### 2.3 - Os custos no Sistema de Distribuição: Uma breve análise de custos!

São exatamente três (03) os custos que serão estudados no sistema:

- Custo total de transferência (transporte das correspondências do CT até os CDDs);
- Custo total de entrega local;
- Custo total dos CDDs (da facilidade).

### 2.3.1 - Custo total de transferência

Este custo para cidade de grande porte é bastante alto. Entretanto, quando aumentamos o número de CDDs no sistema a distribuição própria dos mesmos para suas respectivas circunscrições diminui. Sendo assim, quando fazemos aumentar o número de CDDs do sistema, de modo geral cada conjunto de dois ou mais CDDs vem a requer uma viagem (ou rota) separada. Desta forma, pode ser assumido este custo como sendo função linear do número de CDDs.<sup>3</sup>

Mesmo para cidades de grande porte - como São Paulo, onde existem hoje mais de vinte (20) CDDs e mais de quatrocentos (400) distritos - a variabilidade deste custo é ainda pequena como função do número de CDDs. Não obstante, a variabilidade é também pequena no que diz respeito a mudanças nas localizações deste CDDs.

### 2.3.2 - Custo total de entrega local

Entende-se por entrega local - vide Fig.1 Sistema Logístico - o estágio que compreende desde a etapa inicial de triagem por distrito de entrega, realizada nos CDDs, até a entrega propriamente dita das correspondências aos clientes individuais (pontos de entrega). Neste estágio distingue-se quatro tempos que somados deve ser

---

<sup>3</sup> Em geral, obter um relação teórica para este tipo de custo é demasiadamente complicado (ver **Hall, 1985**). Não obstante, lembrando, ossos CDDs não são padronizados - a concepção da ECT era a de padronizar, mas evoluiu-se para uma configuração onde aparecem três (03) tipos de CDDs: um tipo que ela denomina de CDD Mínimo; outro que é o "padrão"; e o terceiro tipo que seria todo CDD que não se enquadrasse nos dois primeiros, isto é uma exceção - como as unidades de entrega do modelo apresentados por **Rosenfield et ali [35]** onde o mesmo assume também custo de transferência como função linear do número de tais unidades de entrega. Mesmo assim não se vê muita diferença no que diz respeito à questão da pouca variabilidade do custo de transferência quer seja ou não padrões as unidades de entrega (ou no nosso caso, os CDDs!). Assumir Unidades de Entrega como sendo padrão foi, como diz o próprio autor, uma das simplificações necessárias dentro daquele modelo teórico. Porém, tal simplificação não serve para o nosso propósito onde devesse-se tratar o Estudo de Caso da ECT o mais realisticamente possível.

(pontos de entrega). Neste estágio distingue-se quatro tempos que somados deve ser igual ou menor ao tempo útil que é de oito horas diárias de jornada de trabalho de cada carteiro. Estes quatro tempos são:

- **Tempo de triagem** por distrito de entrega (é o tempo interno nos CDDs);
- **Tempo por percurso improdutivo** (é o tempo de viagem de ida e volta dos carteiros dos CDDs até as suas regiões de entrega ou distritos;
- **Tempo entre paradas** nos distritos de entrega (é o tempo de deslocamento entre um ponto de entrega e outro dentro de um distrito de carteiro);
- **Tempo no ponto de entrega** (é o tempo gasto pelo carteiro para efetivamente efetuar a entrega a um cliente individual);

Destes quatro tempos acima, o segundo que é o tempo por percurso improdutivo é o único que depende ou varia com o número de CDDs localizados. Evidentemente, quanto maior for o número de CDDs menor será este tempo. Não obstante, o tempo de viagem grande devido a um número pequeno de CDDs diminui a eficiência do pessoal da entrega - pode até impossibilitar a entrega se comprometer demais o tempo útil - e implica ainda em aumento de custos devido à exigência de mais carteiros e veículos para fazerem a entrega. Outro custo que está implicitamente associado a este tempo por percurso improdutivo é o “custo” por percurso improdutivo, mesmo quando hoje grande parte dos carteiros se dirigem aos seus distritos a pé, de ônibus (gratuito) ou de bicicleta. Só para se ter uma idéia, na cidade de Florianópolis-SC existem três CDDs e o tempo improdutivo médio diário, por carteiro, destes CDDs é de 80 min., 80 min. e 100 min. respectivamente. Levando em consideração que estes CDDs atendem 19 distritos, 28 distritos e 30 distritos

respectivamente, e lembrando que a cada distrito corresponde um carteiro, então o tempo improdutivo total referente a estes três CDDs é igual a 6760 min. ( $80 \times 19 + 80 \times 28 + 100 \times 30$ ). Dividindo 6760 minutos pelo número total de carteiros que é 77 ( $19 + 28 + 30$ ), multiplicando por 30 dias e finalmente dividindo por 480 min. (que corresponde a oito horas de jornada de trabalho diário), resulta em um gasto no sistema de aproximadamente cinco (05) carteiros e meio referentes ao tempo improdutivo.

Numa cidade de grande porte como São Paulo onde existem mais de 400 distritos, o “custo” com o tempo improdutivo se não é adotado uma metodologia adequada para o dimensionamento (número) e localização de CDDs pode ser enorme. É de interesse da ECT ver este tempo improdutivo minimizado (otimizado).

### 2.3.3 - Custo total dos CDDs (da facilidade)

É pensamento da empresa ECT incrementar o sistema de informações gerenciais, contemplando custos. Todavia, foi feito esforço no sentido de levantar os custos pertinentes aos CDDs. Não obstante, o quadro de custos de operação dos CDDs revela que o custo total de operação de um CDD não varia muito em função do número de carteiros eventualmente alocados a este CDD. Todos os fatores que dependem do número de carteiros - tais como: área do CDD; custo com supervisores, consumo de água e luz, etc. - tem pouca variabilidade, e por conseguinte, considera-se daqui para frente que os CDDs são “padrões”.

**Observação:** O quadro, com os custos de operação, foi elaborado baseado em CDDs com configurações de 10, 15, 20, 25 e 30 carteiros.



É razoável então, adotar o custo total de um CDD como um custo fixo que é o valor médio dos valores dos custos totais de um CDD em função do número de carteiros.<sup>4</sup>

**Observação-1:** Não são consideradas despesas propriamente ditas do CDD: despesas com os carteiros, tais como: salários, encargos, horas extras, adicional/sábado. Estas despesas diretas com carteiros são intrínsecas ao próprio Sistema de Distritamento que já tem o número de carteiros ( ou distritos) previamente determinado.

Portanto, se  $P$  é o número total de CDDs no Sistema de Distribuição e  $\mu$  é custo total médio de um CDD, então o custo total dos CDDs em função do número de carteiros é:

$$P \times \mu$$

**Observação-2:** Em outras palavras, o produto  $P \times \mu$  não depende mais da configuração ou tipo de CDD, no que diz respeito ao número de carteiros.

**Observação-3:** O custo fixo de um CDD poderia, ainda, depender do lugar ou local para a localização do CDD. Mas tal situação não se verifica já que de modo geral a empresa ECT aluga a área (espaço físico) que no mercado imobiliário, mesmo variando de cidade para cidade, o preço do metro<sup>2</sup> varia pouco de bairros para outros.

---

<sup>4</sup> No artigo [34] que trata de um Estudo de Caso com aplicação no Serviço Postal Norte Americano (SPNA), o autor faz uso de uma relação obtida do manual do SPNA que prescreve a área requerida para todos os tipos de facilidades (suas unidades de entrega). Esta relação acaba estabelecendo o tamanho (pé<sup>2</sup>) das facilidades como função linear do número de carteiros (ou número de rotas ou regiões de entrega):  $\text{pé}^2 = 2048 + 296 \cdot \text{rotas}$ .

Para compôr o seu modelo de custos, o autor vale-se de estudos do SPNA que expressam custos por pé quadrado, isto é para cada tamanho de facilidade. Não obstante, é enfatizado que "facilidades grandes custam menos por pé quadrado do que as pequenas". Sabe-se que isto é válido quando se trata de preço de área construída, mas que a relação é não-linear: uma construção de 40m<sup>2</sup> não tem custo quatro vezes o custo de quatro construções de 10m<sup>2</sup> cada.

Os CDDs da empresa ECT são localizados de modo geral em prédios alugados. Não obstante a relação custo por m<sup>2</sup> é linear. Porém, vimos que tem pouca variabilidade.

## 2.4 - Critérios da ECT para a escolha dos lugares viáveis à localização de CDDs

São observados os seguintes parâmetros:<sup>5</sup>

- concentração de carga, devendo situar-se em ponto da região que apresentar significativo volume da carga relativa do CDD. Isto é, o CDD deverá ter uma quantidade própria (**Qp**) grande quando localizado neste lugar;
- facilidade de locomoção, devendo situar-se em ponto próximo a terminais de ônibus ou ponto de parada de ônibus: condições de acessibilidade.
- posição geográfica, devendo situar-se em ponto equidistante à maioria dos distritos cobertos (atendidos) pelo CDD. Isto é, o CDD deverá situar-se no centro da sua circunscrição;
- CEP do endereço do imóvel (ponto de entrega) condizente com a faixa de CEP abrangidos pelo CDD. Isto é, um CDD não pode atender um ponto de entrega que não esteja dentro da sua circunscrição;

## 2.5 - Duas grandes restrições no Sistema

### Uma forte restrição sobre os CEPs:

Os CEPs são, como já dissemos anteriormente em 2.1.1, códigos de endereçamento postal atribuídos aos logradouros e de carácter quase que definitivo, uma vez que fica impossível mesmo para a ECT alterá-lo porque isto implicaria em refazer todos os milhares de catálogos com as listagens de CEPs em todas as agências de postagem.

<sup>5</sup>

Parâmetros ou fatores que nem sempre podem ser conciliados todos de uma vez.

Também, os CEPs não podem ser agrupados de qualquer maneira para a formação de uma circunscrição a qual será atendida por um CDD. Quando um logradouro é alocado (designado) a um carteiro de um determinado CDD, todos os demais logradouros que compõe este CEP devem ser atendidos também por este mesmo CDD.

#### **Uma forte restrição sobre os CDDs:**

Existe um limite para a capacidade física do CDD no que diz respeito ao número de carteiros a ele alocados. A empresa ECT recomenda que para constituir um CDD, este deve possuir um mínimo de 15 carteiros; e um CDD deve possuir no máximo 40 carteiros, o que do contrário seria considerado teoricamente uma exceção mas sem chances de ser concretizado na prática haja visto às dificuldades em termos operacionais.

## 2.6 - Considerações finais sobre o Capítulo 2

⇒ Com o Sistema de Distritamento, acredita-se que a área total da cidade fique dividida em circunscrições onde todos os distritos individualmente tem a mesma importância.

⇒ Os CDDs não são padronizados propriamente. Mas de acordo com a observação-2 na Seção 2.3.3, daqui para frente, sempre que falarmos em CDD deve ser entendido como um CDD “padrão” (isto é, o de custo médio em função do número de carteiros).

⇒ O Sistema de Distritamento da empresa ECT tem convivido com a restrição sobre os CEPs mencionada na Seção 2.5, porque realmente não há como evitá-la.

Se não existisse tal restrição, poderíamos ter abandonado as imposições do Sistema de Distritamento da ECT, optando por uma abordagem na linha de **Daganzo [8]** que trabalha com o zoneamento (distritamento) ou mais precisamente com a forma das zonas (distritos) para as facilidades (CDDs) já existentes - estes autor propõe alongar as zonas na direção da facilidade de maneira a minimizar o tempo de viagem desde a facilidade até as zonas.

Acreditamos que nem mesmo uma metodologia como a desenvolvida por **Novaes [28]** poderia ser viável na presença de tal uma restrição. Esta metodologia, tal como o Sistema de Distritamento da ECT, faz a subdivisão da região - a qual deve ser servida por uma facilidade (depósito) já existente - em zonas levando-se em consideração também uma série de fatores, destacando-se: a distância da zona ao depósito (a facilidade); densidade de pontos de parada por km<sup>2</sup>; condições viárias de tráfego; capacidade do veículo. Todavia, enquanto o Sistema de Distritamento da ECT

tem os distritos dimensionados e delimitados através de uma sistemática baseada na experimentação, no próprio processo operacional, a metodologia do autor tem bases científicas. Resumidamente, esta metodologia do autor passa por um primeiro estágio onde a região de distribuição é abstraída de seu espaço contínuo, sendo representada por meio de quadriculas ordenadas segundo os dois eixos de um sistema cartesiano; e posteriormente com as informações das variáveis de interesse (densidade de pontos de parada, etc..) indexadas a cada uma destas quadriculas, faz-se a ordenação destas quadriculas agora a partir do depósito segundo o valor (crescente) das distâncias ao mesmo; e o resultado final é então a divisão da região em sub-regiões concêntricas ao depósito as quais são por sua vez divididas em camadas de zonas com o enfoque na metodologia de **Daganzo [8]** mencionada anteriormente.

⇒ A restrição sobre os CDDs, mencionada na Seção 2.5, será considerada nos dois “approachs” de que trata este trabalho.

⇒ Quando falamos nos custos dos CDDs e nos custos de transferência, o que mostramos, na verdade, é apenas que estes dois custos existem no sentido de que eles fazem parte do contexto do Sistema de Distribuição. E por causa da pouca variabilidade destes custos no que diz respeito ao número e localização de CDDs, estes mesmos custos não são fatores relevantes no processo de otimização em nenhuma das duas abordagens incluídas neste trabalho. Mais precisamente, estes custos não aparecerão na função objetivo de nenhuma das duas abordagens.

⇒ Dos critérios da ECT para a escolha dos lugares viáveis à localização de CDDs Seção 2.4, o último comparecerá e será decisivo no Capítulo 4 quando da formulação e busca de solução das duas abordagens que corresponde a este trabalho: este critério aparecerá como uma das hipóteses básicas, mais precisamente a última hipótese.

⇒ O custo de operação de um CDD em si não será levado em consideração. Mas na abordagem do Problema de Cobertura de Conjunto (ver Cap. 3) é preocupação minimizar o custo referente ao número de CDDs (facilidades), respeitando-se padrões de serviço.

⇒ O custo do percurso improdutivo, na entrega local, tem um “proxy” que é a própria distância (ou tempo) de viagem do carteiro. E esta distância de viagem será minimizada quando da abordagem “Mini-sum” , aplicando-se o método das P-Mediana.

---

Central até às Unidades de Entrega) de 300 Unidades de Entrega. E sobre estes quatro componentes de custo total de operação, foi aplicado regressão (mínimos-quadrados), expressando-se então estes custos ou equações de custos em termos do número de regiões de entrega por Unidade de entrega. Uma figura (Pag. 170), apresentando um gráfico “Custos de Operações x Número de Unidades de Entrega”, é usada pelo autor para comparações ou até mesmo para a validação da aplicação do seu modelo teórico no Serviço Postal Norte Americano. Em resumo, ele se utilizou de um modelo (equações) de custo.

## CAPÍTULO 3

### Revisão Bibliográfica

#### 3.1 Aspectos teóricos e revisão bibliográfica sobre a teoria geral dos Grafos

##### 3.1.1 Definições

###### 3.1.1.1 - Grafos

Um grafo  $G$  é uma estrutura matemática, denotada por  $(X,A)$ , onde  $X$  é um conjunto de  $n$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (chamados vértices ou nós) e  $A$  é um conjunto de  $m$  linhas  $a_1, a_2, \dots, a_m$  que ligam todos ou alguns desses pontos [4].<sup>1</sup>

###### 3.1.1.2 - Arcos e arestas

Se as ligações  $a_i \in A$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ , têm orientação, então estas são chamadas arcos. Se não tiverem orientação, então são chamadas arestas [4].

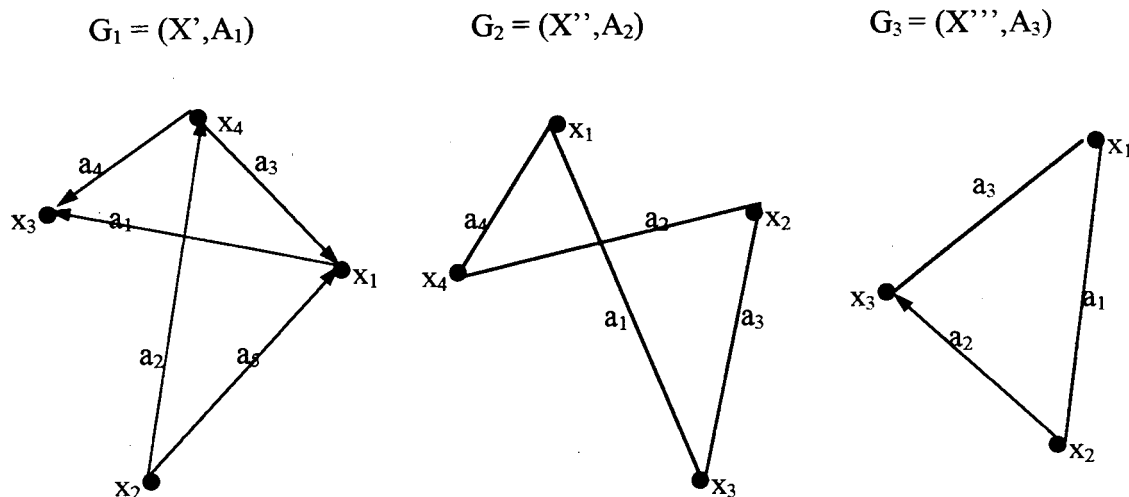
###### 3.1.1.3 - Grafos orientados, não-orientados e mistos

São denominados, respectivamente, grafos orientados, não-orientados e mistos, os grafos cujas linhas  $a_i$  são somente arcos, somente arestas ou contêm ambos (arcos e arestas).

---

<sup>1</sup> Em **Andrade [1]** é destacado o trabalho do matemático Euler (1707 a 1783) como o que primeiro se utilizou do conceito matemático de “Topologia” para resolver um problema ou uma situação praticado dia-a-dia. “...foi a primeira notícia do emprego de uma figura sintética, retratando fielmente uma circunstância de ordem e continuidade, na demonstração de uma propriedade geométrica. Essa figura passa a ser denominada até os nossos dias de GRAFO”.

Exemplo:



Os grafos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  são, respectivamente, orientado, não-orientado e misto!

#### 3.1.1.4 - Conexidade

Um grafo  $G(X, A)$  é dito conexo, se dados quaisquer vértices  $x_i$  e  $x_j$  pertencentes a  $X$ , com  $x_i \neq x_j$ , existe uma cadeia (para grafos orientados e não-orientados, respectivamente, é uma sequência de arcos e uma sequência de arestas onde extremidade de um arco ou de uma aresta coincide com a extremidade de outro ou de outra [4]) ligando estes vértices. Caso contrário é dito desconexo.

#### 3.1.1.5 - Vértices adjacentes

Dois vértices  $x_i$  e  $x_j$  de um grafo  $G(X, A)$  são ditos adjacentes se algum dos arcos  $(x_i, x_j)$ ,  $(x_j, x_i)$  ou ambos (para o caso do grafo não-orientado) existem no grafo [4]. Assim, por exemplo, no grafo  $G_1$ , dado em 3.1.13, os vértices  $x_3$  e  $x_4$  são adjacentes, ao passo que  $x_2$  e  $x_3$  não o são.



### 3.1.1.6 - Subgrafo

Dado um grafo  $G(X,A)=(X,\Gamma)$  -  $\Gamma(x_i) = \{x_j \in X; (x_i, x_j) \in A\}$ <sup>2</sup> - , um subgrafo de  $G$  é um grafo  $G_s = (X_s, A_s)$ , onde  $X_s \subset X$  e  $(x_i, x_j) \in A_s$  se, e somente se:  $x_i \in X_s$ ,  $x_j \in X_s$  e  $(x_i, x_j) \in A$ . Portanto, um subgrafo tem um subconjunto de vértices do grafo original, mas que contém os mesmos arcos com vértices inicial e terminal ambos neste subconjunto [4].

### 3.1.1.7 - Matriz de adjacência

A matriz de adjacência é denotada por  $A=[a_{ij}]$  e é dada por:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1, \text{ se } (x_i, x_j) \text{ existe em } G; \\ a_{ij} &= 0, \text{ se } (x_i, x_j) \text{ não existe em } G. \end{aligned}$$

### 3.1.1.8 - Grafo Ponderado

Dado um grafo  $G(X,A)$ , se associarmos a cada arco (ou aresta)  $a_{ij} \in A$  um número  $c_{ij}$  (chamado custo, distância ou peso do arco ou aresta) e a cada vértice  $x_k \in X$  um número  $v_k$  (chamado peso do vértice), o grafo  $G$  é dito grafo ponderado.

### 3.1.1.9 - Árvore

São inúmeros os conceitos e notações usadas pelos diferentes autores. Não obstante damos aqui duas destas definições equivalentes dentre as inúmeras apresentadas em Rabuske [34]:

- i) um grafo conexo de  $n$  vértices e  $(n-1)$  arestas;

---

<sup>2</sup>  $\Gamma$  tem uma importância muito grande quando se trata de algoritmos de busca em árvore.  $\Gamma$  é chamado de operador sucessor (e  $\Gamma^{-1}$ , onde  $\Gamma^{-1}(x_i) = \{x_j \in X; (x_j, x_i) \in A\}$ , é chamado de operador antecessor)

- ii) um grafo no qual cada par de vértices é ligado por um e somente um caminho (é uma sequência de arcos, onde o vértice final de um coincide com o inicial de outro) simples.

### 3.1.2 Representação de um grafo no computador

Examinemos duas representações de um grafo adequadas ao uso em computador, ou seja, estruturas que correspondem univocamente a um grafo dado e que possam ser manipuladas sem dificuldade pelo mesmo.

#### 3.1.2.1 - Representação pela Matriz de Custos

A Matriz de Custos  $C$  de um grafo  $G$ , com  $n$  nós, é uma matriz  $C = [c_{ij}]$  de ordem  $n \times n$ , onde cada  $c_{ij}$  é o custo (ou o peso) do arco ou da aresta, ligando dois nós  $v_i$  e  $v_j$ . Ocorrendo mais de uma ligação direta entre  $v_i$  e  $v_j$  considera-se a de menor custo.<sup>3</sup>

Este tipo de representação, embora simples, apresenta a desvantagem de, para grafos grandes, requerer muita capacidade de memória - hoje, dependendo do caso, isto pode não representar um problema sério. Para  $n$  vértices, necessita-se  $n^2$  informações binárias. Se o grafo for não-orientado, basta, evidentemente, armazenar o “triângulo superior” da matriz  $C$ . [27]<sup>4</sup>

<sup>3</sup> No problema de localização de CDDs da empresa ECT, quando da abordagem “Mini-sum” (P-Mediana), já tem-se apenas as ligações diretas de menor custo entre os nós (CEPs). E o custo de cada aresta é o tempo (ou distância) de viagem entre um CEP e outro.

<sup>4</sup> No problema de localização de CDDs da empresa ECT, quando da abordagem “Mini-sum” (P-Mediana), a matriz de custo não é quadrada - importarão apenas as ligações entre os CEPs viáveis à localização dos CDDs, e as ligações entre os CEPs viáveis e os CEPs não viáveis - e por conseguinte o número de informações guardadas é bem menor do que  $n^2$ . E embora o grafo seja não-orientado, a matriz de custos (distâncias) será armazenada inteira

### 3.1.2.2 - Representação por Lista de Aresta

Uma representação bastante eficiente, principalmente no caso de grafos maiores, é através de Lista de Arestas.

Neste caso é conveniente utilizar três vetores,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$   $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  e  $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ , onde no vetor  $A$  estão os inícios dos arcos, em  $B$  as extremidades dos mesmos, e em  $C$  seus custos. O espaço de memória requerido neste caso é de  $3m$  informações binárias, em contraste às  $n^2$  da representação pela Matriz de Custos. [27]

## 3.2 Aplicações da teoria dos grafos

A Teoria Geral dos Grafos é usada na prática para resolver diversos problemas em diversas áreas do conhecimento: Artes, Psicologia, e os problemas de Localização na área de Logística. Com respeito a esta última área apresentamos a seguir dois enfoques ou abordagens: O problema “Mini-sum” (dentro do caso clássico da determinação das P-Mediana) e o Problema “The Set Partitioning Problem”.<sup>5</sup>

### 3.2.1 - O Problema “Mini-sum” e Localização de Medianas

Este enfoque, dentro do contexto dos problemas de localização de facilidades, trata da determinação de localizações para facilidades de maneira a

---

<sup>5</sup> Em Andrade [1] pode ser visto como a teoria dos grafos resolve uma gama variada de problemas tais como: um problema de montagem; um problema de economia tarifária; um problema da química do carbono; um problema social (área da Sociologia); um problema cartográfico; a pesquisa da nova forma e da palavra; um problema antropológico.

minimizar a soma da distância - e este é um critério<sup>6</sup> - de cada vértice desde (indo ou vindo de) sua facilidade mais próxima. Não obstante, consideremos somente problemas de localização de facilidades em que as facilidades devem ser localizadas sobre um grafo;<sup>7</sup> isto é, cada facilidade deve ser localizada em um vértice e/ou sobre uma aresta.

Segundo Minieka [26], com a possibilidade da facilidade estar localizada em um vértice e/ou sobre uma aresta, torna-se necessário aqui distinguir dois conceitos: Se as facilidades devem ser localizadas somente nos vértices, as localizações são chamadas medianas; se as facilidades podem ser localizadas sobre as arestas e nos vértices, as localizações são chamadas de medianas absolutas. Sendo  $p$  para denotar o número de facilidades a serem localizadas, tem-se assim, respectivamente, o problema da determinação das  $p$ -medianas e o problema da determinação das  $p$ -medianas absolutas.

#### Em resumo:

De um modo geral, dizemos que a localização de medianas aparece em problemas associados com a localização de facilidades num grafo, quando exige-se colocar esta facilidade num caminho tal que a soma das menores distâncias entre a facilidade e os vértices do grafo seja mínima.

<sup>6</sup> Outro critério seria o “Mini-max”: localizar as facilidades tal que a distância máxima para um vértice deste sua facilidade mais próxima seja mínima. Considerando que a localização de  $m$  facilidades pode dar-se somente sobre vértices tem-se o que se chama de o problema de  $m$ -centros; e se estas  $m$ -facilidades podem ser localizadas sobre arestas ou em vértices tem-se o problema de  $m$ -centros absolutos.

<sup>7</sup> Isto porque optamos pela Abordagem do Conjunto Finito ou Viável - ao invés da Abordagem do Conjunto Infinito - mencionada na Seção 1.2 do Capítulo 1, que não considera todos os infinitos pontos no espaço contínuo correspondente a área da cidade como possíveis lugares para a localização da facilidade. E nem muito menos é considerada a rede viária! Cabe dizer que mesmo que o problema fosse colocado sob uma rede, segundo Gupta [16] “...é razoável esperar que muitos dos problemas de localização em rede são simplificados quando restritos a uma árvore.”.

### 3.2.1.1 - Aplicações do problema de alocação de medianas

Este tipo de problema ocorre em situações práticas onde se deseja minimizar uma soma ou uma média.<sup>8</sup>

A) Localizar um depósito de distribuição de mercadorias numa rede de rodovias para abastecer diversos clientes com localizações fixas e conhecidas de maneira a minimizar a soma das distâncias, aos clientes. Neste caso os vértices do grafo representam os clientes.

B) Localizar “P” cabinas de telefones públicos de maneira a minimizar o deslocamento médio dos usuários. Neste caso, os vértices são subconjuntos de usuários.

C) Localizar, numa cidade, uma escola de maneira que os alunos de cada bairro desloquem-se em média (média ponderada pelo número de alunos de cada bairro) o mínimo possível. Neste caso os vértices são estes bairros.

D) Localizar unidades operacionais do correio: localizar por exemplo os Centros de Distribuição Domiciliada (CDD) - as unidades de entrega da Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) - de maneira que, em média, o deslocamento dos carteiros dos seus respectivos CDDs até os seus distritos seja o menor possível.

### 3.2.1.2 - Lista de símbolos (Nomenclatura) e definições preliminares

$G(X,A)$	- grafo;
$x_i$ ou $x_j$	- vértices, $i = 1, 2, \dots, n$ ; $j = 1, 2, \dots, n$ ;
$v_j$	- peso (ou importância) associado ao vértice $x_j$ ;

<sup>8</sup> Pode se desejar minimizar somente a soma. E quando trata-se de minimizar a média, geralmente em problemas práticos trata-se da média ponderada pelos pesos (ou importância) atribuídos aos vértices. No entanto, na literatura não aparece explicitamente o conceito formal de média ponderada já que não se fala que a soma dos pesos  $v_j$  dos vértices  $x_j$  deva ser 1: em nenhum momento aparece a expressão  $\sum v_j = 1$ .

$d(x_i, x_j)$	- menor distância do vértice $x_i$ ao vértice $x_j$ ;
$\sigma_o(x_i)$	- no. de out-transmissão do vértice $x_i$ ;
$\sigma_t(x_i)$	- no. de in-transmissão do vértice $x_i$ ;
$\bar{x}_o$	- out-mediana;
$\bar{x}_t$	- in-mediana;
$\sigma_{o,t}(x_i)$	- no. de in-out transmissão;
$\bar{x}_{o,t}$	- in-out mediana;
$X_p$	- subconjunto de vértices do grafo $G$ que contém - vértices;
$D = [ d(x_i, x_j) ]$	- matriz das menores distâncias;
$[ \varepsilon_{ij} ]$	- matriz dos alocados composta dos vértices alocados aos vértices-medianas.

### 3.2.1.3 - No. de transmissão: out-transmissão, in-transmissão e in-out-transmissão

**Definimos** o no. de out-transmissão do vértice  $x_i \in X$ , por

$$\sigma_o(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j d(x_i, x_j). \quad (1)$$

Isto é, o número  $\sigma_o(x_i)$  é a soma das entradas da linha  $x_i$  de uma matriz obtida por multiplicar cada coluna  $j$  da matriz  $D(G) = [ d(x_i, x_j) ]$  por  $v_j$ .

**Definimos** o no. de in-transmissão do vértice  $x_i \in X$ , por

$$\sigma_t(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j d(x_j, x_i). \quad (2)$$

Isto é, o número  $\sigma_t(x_i)$  é a soma das entradas da coluna  $x_i$  de uma matriz obtida por multiplicar cada linha  $j$  da matriz  $D(G) = [ d(x_i, x_j) ]$  por  $v_j$ .

**Definimos** o no. de in-out-transmissão do vértice  $x_i \in X$ , por

$$\sigma_{o,t}(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j [ d(x_i, x_j) + d(x_j, x_i) ]. \quad (3)$$

### 3.2.1.4 - Medianas de G: out-medianas, in-medianas e in-out-medianas

#### Definições:

Um vértice  $\bar{x}_o$  para o qual

$$\sigma_o(\bar{x}_o) = \min_{x_i \in X} \{ \sigma_o(x_i) \} \quad (4)$$

é chamado de out-mediana.

Um vértice  $\bar{x}_t$  para o qual

$$\sigma_t(\bar{x}_t) = \min_{x_i \in X} \{ \sigma_t(x_i) \} \quad (5)$$

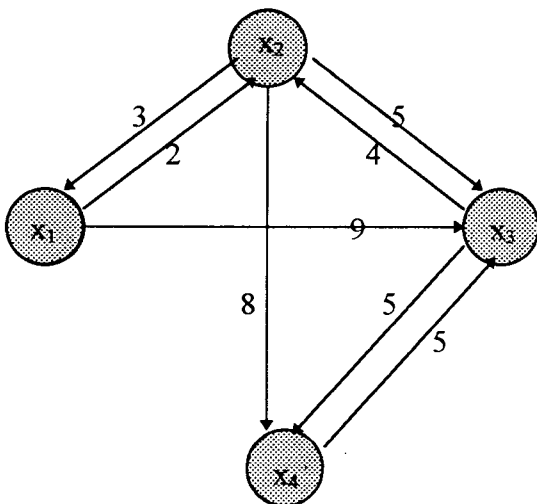
é chamado de in-mediana.

Um vértice  $\bar{x}_{o,t}$  para o qual

$$\sigma_{o,t}(\bar{x}_{o,t}) = \min_{x_i \in X} \{ \sigma_{o,t}(x_i) \} \quad (6)$$

é chamado de uma in-out-mediana.

**Exemplo:** Consideremos o Grafo e a correspondente matriz (das menores distâncias entre os vértices) dados abaixo.



**Fig. A** - Grafo representando as ligações com as distâncias entre os vértices  $x_1, x_2, x_3, x_4$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$	0	2	7	10
$x_2$	3	0	5	8
$x_3$	7	4	0	5
$x_4$	12	9	5	0

$D = [d(x_i, y_j)]:$   
Matriz de menores distâncias

A matriz **D** tendo suas colunas “j” multiplicadas pelos pesos  $v_j$  dos vértices, dá origem a matriz abaixo na qual a soma dos elementos de cada linha são indicadas. E a menor destas somas, sendo no caso 32,5, é o no. de out-transmissão, implicando por definição que  $x_2$  é a out-mediana do grafo dado.

Vetor de pesos					
$v = [$	4,0	6,5	2,5	1,0	$]$
	↓	↓	↓	↓	
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$\sum v_j d(x_i, x_j)$
$x_1$	0	13	17,5	10	= 40,5
$x_2$	12	0	12,5	8	= <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">32,5</span>
$x_3$	28	26	0	5	= 59,0
$x_4$	48	58,5	12,5	0	= 132,0



A matriz **D** tendo suas linhas “j” multiplicadas pelos pesos  $v_j$  dos vértices, dá origem a matriz abaixo na qual a somas dos elementos de cada coluna são indicadas. E a menor destas somas, sendo no caso 27,0, é o no. de in-transmissão, implicando por definição que  $x_2$  é a in-mediana do grafo dado.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Vetor de pesos ↓
$x_1$	0	13	17,5	10	←4,0
$x_2$	12	0	12,5	8	←6,5
$x_3$	28	26	0	5	←2,5
$x_4$	48	58,5	12,5	0	←1,0
$\sum v_j d(x_j, x_i) =$	49,0	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">27,0</span>	65,5	104,5	✓

Para a matriz **D** dada, calculemos a out-in-mediana:

$$\begin{aligned}
 v_1. [d(x_1, x_1) + d(x_1, x_1)] &= 4,0 \cdot [0 + 0] = 0 \\
 v_2. [d(x_1, x_2) + d(x_2, x_1)] &= 6,5 \cdot [2 + 3] = 32,5 \\
 v_3. [d(x_1, x_3) + d(x_3, x_1)] &= 2,5 \cdot [7 + 7] = 17,5 \\
 v_4. [d(x_1, x_4) + d(x_4, x_1)] &= 1,0 \cdot [10 + 12] = 22,0 \\
 \Sigma &= 72,0 = \sigma_{o,t}(x_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_1. [d(x_2, x_1) + d(x_1, x_2)] &= 4,0 \cdot [3 + 2] = 20 \\
 v_2. [d(x_2, x_2) + d(x_2, x_2)] &= 6,5 \cdot [0 + 0] = 0 \\
 v_3. [d(x_2, x_3) + d(x_3, x_2)] &= 2,5 \cdot [5 + 4] = 22,5 \\
 v_4. [d(x_2, x_4) + d(x_4, x_2)] &= 1,0 \cdot [8 + 9] = 17,0
 \end{aligned}$$

$$\Sigma = 60,0 = \sigma_{o,t}(x_2)$$

$$\begin{aligned}
v_1. [d(x_3, x_1) + d(x_1, x_3)] &= 4,0 \cdot [7 + 7] = 56,0 \\
v_2. [d(x_3, x_2) + d(x_2, x_3)] &= 6,5 \cdot [5 + 4] = 58,5 \\
v_3. [d(x_3, x_3) + d(x_3, x_3)] &= 2,5 \cdot [0 + 0] = 0 \\
v_4. [d(x_3, x_4) + d(x_4, x_3)] &= 1,0 \cdot [5 + 5] = 10,0 \\
&\quad \Sigma = 124,5 = \sigma_{o,t}(x_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1. [d(x_4, x_1) + d(x_1, x_4)] &= 4,0 \cdot [10 + 12] = 88,0 \\
v_2. [d(x_4, x_2) + d(x_2, x_4)] &= 6,5 \cdot [8 + 9] = 110,5 \\
v_3. [d(x_4, x_3) + d(x_3, x_4)] &= 2,5 \cdot [5 + 5] = 25,0 \\
v_4. [d(x_4, x_4) + d(x_4, x_4)] &= 1,0 \cdot [0 + 0] = 0 \\
&\quad \Sigma = 223,5 = \sigma_{o,t}(x_4)
\end{aligned}$$

Assim,  $\sigma_{o,t}(\bar{x}_{o,t}) = \min_{x_i \in X} \{ \sigma_{o,t}(x_i) \} = \min. \{ 72,0; 60,0; 124,5; 223,5 \} = 60,0$ . E

portanto,  $\bar{x}_{o,t} = x_2$  é o vértice out-in-mediana do grafo dado.

Observações: 1) O vértice  $x_2$ , no exemplo acima, é ao mesmo tempo o out-mediana o in-mediana do grafo. Mas isto foi apenas coincidência;

2) Nem o out-mediana e nem o in-mediana de um grafo precisa ser única.

3) Vê-se através do exemplo ou das próprias definições que se desejamos localizar uma facilidade em um destes quatro vértices e se o objetivo é minimizar por exemplo deslocamento médio desde a facilidade aos demais vértices pensando-se mais na ida da facilidade do que na volta à esta facilidade, então a melhor opção é o vértice out-mediana. Do contrário, se estamos mais interessados na “rapidez” de volta à facilidade, então o vértice in-mediana é o mais indicado. Não obstante, se tanto a saída como a volta da facilidade aos demais vértices é importante,

um vértice out-in-mediana seria o ideal. Para grafos não direcionados, a (s) out-mediana (s) e a (s) in-mediana (s) obrigatoriamente coincidem haja visto que a matriz D das menores distâncias é simétrica; e no cálculo da out-in-mediana,  $[d(x_i, x_j) + d(x_j, x_i)]$  é substituído na expressão (6) por  $2 \cdot d(x_i, x_j)$ .

### 3.2.1.5 - Medianas múltiplas: P -Medianas

**Definições:** Seja  $X_p$  um subconjunto do conjunto  $X$  de vértices de um grafo  $G(X, \Gamma)$ .  $X_p$  contém  $p$  vértices. Definamos então o que se entende por distância entre um vértice  $x_j \in X$  e um conjunto de vértices. Mais precisamente, a distância entre  $x_j$  e o subconjunto  $X_p$  é definido por:

$$d(x_j, X_p) = \min_{x_i \in X_p} \{d(x_j, x_i)\} \quad (7)$$

e definimos a distância entre o subconjunto  $X_p$  e o vértice  $x_j$  por:

$$d(X_p, x_j) = \min_{x_i \in X_p} \{d(x_i, x_j)\} \quad (8)$$

**Definições:** Se  $x_i \in X_p$  produz o mínimo em (7) ou (8), dizemos que  $x_i$  é alocado a  $x_j$ .

A matriz dos alocados  $[\epsilon_{ij}]$  é de ordem  $P \times N$ , onde  $N$  é o número total de vértices e cujo elemento genérico é dado por

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j \text{ é alocado a } x_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

**Definições:**

Definimos os números de transmissão para o conjunto  $X_p$ , por:

$$\sigma_o(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j d(X_p, x_j) \quad (9)$$

e

$$\sigma_i(X_p) = \sum_{x_j \in X} v_j d(x_j, X_p). \quad (10)$$

Um conjunto  $\overline{X_{p_o}}$  para o qual

$$\sigma_o(\overline{X_{p_o}}) = \min_{X_p \subseteq X} \{ \sigma_o(X_p) \} \quad (11)$$

é chamado p-out-mediana do grafo G.

Um conjunto  $\overline{X_{p_i}}$  para o qual

$$\sigma_i(\overline{X_{p_i}}) = \min_{X_p \subseteq X} \{ \sigma_i(X_p) \} \quad (12)$$

é chamado p-in-mediana do grafo G.

### **3.2.1.6 - A Matriz “D” das menores distâncias e a abordagem do conjunto viável (ou finito)**

No exemplo anterior em que foi dada uma matriz de distâncias mínimas representando um grafo G com quatro vértices, poderia-se estar pensando num problema de localização de uma facilidade onde de acordo com os números de

transmissão diríamos que o vértice  $x_2$  é o escolhido dentre todos os quatro para ser a localização ótima da facilidade.

No exemplo anterior, o número total de vértices é quatro, e todos eles são potencialmente candidatos a in-mediana (ou out-mediana). Mas segundo a abordagem do conjunto viável mencionada na Seção 1.1, pode ocorrer, por exemplo, dentro de um problema de localização de facilidades que dentre todo um conjunto  $N$  de lugares para serem atendidos por  $P$  facilidades, apenas um número  $M$  ( $M < N$ ) destes lugares são selecionados previamente como potencialmente viáveis (candidatos) à localização das  $P$  facilidades (P-in-medianas ou P-out-medianas ou p-in-out-medianas). Neste caso a matriz de distâncias mínimas em geral não é quadrada, já que apenas as ligações diretas (entre pares de vértices adjacentes) que interessam ao problema são as ligações entre os vértices dentro do conjunto  $M$  e as ligações entre vértices de  $M$  e vértices de  $N$ . **Observação:** Exemplo da construção de um tal matriz e exemplo da determinação das medianas múltiplas (P-Medians) são dados na Seção 4.1.4.1, onde aplicamos a teoria ao problema prático da localização de CDDs na empresa ECT.

### 3.2.1.7 - O conjunto $X_p$ e a abordagem do conjunto viável

Com respeito a abordagem do conjunto viável mencionada acima, se  $N$  são todos os lugares a serem atendidos por  $P$  facilidades a serem localizadas dentre um conjunto  $X=M$  ( $M < N$ ) de lugares viáveis, o grafo que por exemplo representa o problema de localização nesta situação é  $G = \{\Gamma(x_i) = x_j, \text{ tal que } x_j \in \underline{X=M} \text{ ou } x_j \in N-X, \text{ e onde } x_i \in X\}$ .

Para cada  $P$  fixo, o número de possibilidades a serem testadas para a localização das  $P$ -facilidades levando-se em consideração os  $X=M$  lugares viáveis é

dados por  $\binom{X}{p}$ . Isto é  $X_p$  tem um total de  $\binom{X}{p}$  subconjuntos cada um destes com  $p$  elementos denotados e indexados por  $X_{p,i}$  para  $i = 1, 2, \dots, \binom{X}{p}$ . Não obstante, é importante destacar que o conjunto  $\overline{X_p}$  encontrado, eventualmente poderá não ser o conjunto das  $p$ -medianas do grafo  $G$  representativo do problema quando da abordagem do conjunto viável, pois o mesmo estará sendo construído não com a totalidade  $N$  dos lugares, mas sim a partir de um conjunto bem mais reduzido que é  $X$ .

### 3.2.1.8 - P-Medianas absolutas

Seja  $G(X,A)$  um grafo não-direcionado, onde  $A$  representa o conjunto de arestas. Queremos encontrar um ponto  $y$  nas arestas de  $G$  (não necessariamente um vértice) tal que o número de transmissão

$$\sigma(y) = \sum_{x_j \in X} v_j d(y, x_j) \quad (13)$$

seja menor que o número de transmissão da mediana de  $G$ .

**Teorema-1:** Existe no mínimo um vértice de  $G(X,A)$  para o qual  $\sigma(x) \leq \sigma(y)$  para todo  $y$  arbitrário em  $G$ .

**Teorema-2:** Existe no mínimo um subconjunto  $X_p \subset X$  contendo  $p$  vértices, tal que  $\sigma(X_p) \leq \sigma(Y_p)$  para todo conjunto arbitrário  $Y_p$  de  $p$  pontos nas arestas ou vértices do grafo  $G = (X,A)$ .

Diante destes teoremas verificamos que não há necessidade de pesquisar as  $p$ -medianas absolutas porque sempre existirá uma solução ótima no conjunto de vértices.

### 3.2.1.9 - Generalização da p-mediana

Dado um grafo  $G$ , se associamos um custo fixo  $f_i$  - custo por exemplo, com a construção ou aluguel da facilidade <sup>9</sup> - que pode variar para os diversos locais “xi” possíveis de localização, o problema de encontrar as p-medianas de  $G$  resume-se em encontrar um subconjunto  $X_p$  contendo  $p$  vértices tal que

$$\mathcal{Z} = \sum_{x_j \in X_p} f_i + \sigma(\bar{X}_p) \quad (14)$$

é minimizada.

Quando todos os termos  $f_i$  são iguais a um certo valor  $f$  para todos os lugares possíveis de localização, a expressão (14) torna-se:

$$\mathcal{Z} = pf + \sum_{x_j \in X_p} \sigma(\bar{X}_p) \quad (15)$$

Em algumas situações práticas pode ser exigido que  $|\bar{X}_p| \leq p$  (cardinalidade ou no. de elementos do conjunto  $\bar{X}_p$  seja menor ou igual a  $p$ ). Neste caso, o problema se resume em minimizar

$$\mathcal{Z} = \sum_{x_j \in X_p} f_i + \sigma(\bar{X}_p)$$

sujeito a:  $|\bar{X}_p| \leq p$ .

---

<sup>9</sup> Tal não ocorre no problema de localização de CDDs na empresa ECT pois, que já mencionado no capítulo 2, o custo fixo mais precisamente o aluguel do CDD (da facilidade) é o mesmo para todos os lugares possíveis de localização. E como nem sequer estamos trabalhando com modelo de custos, o termo  $pf$  não deverá aparecer na expressão (15) - o objetivo é minimizar, somente, a soma das distâncias

Também pode ocorrer a necessidade de considerar, por exemplo, a dimensão ou capacidade física da facilidade. Neste caso, fazemos uma restrição ao número <sup>10</sup>

$$\sum_{x_j \text{ alocados a } x_i} v_j \quad (16)$$

### 3.2.1.10 - Métodos de resolução

Na literatura, alguns métodos são encontrados. Vejamos dois destes métodos: <sup>11</sup>

#### 3.2.1.10.1- Método da Enumeração Exaustiva ou Direta

Vimos em 3.2.1.7 que se  $M$  é o conjunto dos lugares viáveis à localização de  $P$  facilidades, então o número de possibilidades a serem testadas é  $\binom{M}{p}$ . O método de enumeração exaustiva ou direta, consiste em avaliar uma-a-uma cada uma destas possibilidades até que seja encontrada a solução ótima [37].

Este método foi usado por **Hakimi [19]** para encontrar as 3-medianas de um grafo com 10 vértices. Porém, mesmo com o recurso do computador o tempo computacional cresce muito rapidamente o que limita o uso do método para sistemas com muitos vértices.

<sup>10</sup> Quando da aplicação da abordagem “Minisum”(P-Mediana) no problema de localização de CDDs na empresa ECT, no Capítulo 4, esta restrição aparecerá. Mais precisamente este número representará o número de carteiros (ou distritos) alocados ao CDD - o peso  $v_j$  será o número de distritos do CEP “j”, o qual ficará restrito a no máximo 40, conforme exigência da empresa mencionada no Capítulo 2. Não obstante, não trabalharemos com a exigência de no mínimo 15 carteiros para constituir um CDD, isto é, não restringiremos o número impondo um limite inferior para o mesmo de 15.

<sup>11</sup> A descrição e demais comentários de dois outros métodos (heurísticos), o Método da Partição e o método de Pizzolato [33], são dadas em **Binfaré Neto [27]**.



### 3.2.1.10.2 - Método de Substituição de Vértices

É um método heurístico - portanto sem garantia de convergência para o ótimo - devido a Teitz e Bart [37].

Escolhemos ao acaso um conjunto inicial  $S$  que supomos ser uma aproximação do conjunto  $\bar{X}_p$  das  $p$ -medianas. A seguir testamos se cada vértice  $x_j \in X-S$  pode substituir um vértice  $x_i \in S$ , isto é, produzimos  $S' = S \cup \{x_j\} - \{x_i\}$  tal que se tenha os números de transmissão  $\sigma(S') < \sigma(S)$ . E assim,  $S'$  é uma melhor aproximação de  $\bar{X}_p$ . Segue-se este procedimento, produzindo aproximações para  $\bar{X}_p$ , isto é, até chegar-se a um conjunto  $\bar{S}$ , onde nenhuma substituição de vértice de  $\bar{S}$  por outro em  $X-\bar{S}$  produza um “melhor” número  $\sigma$  menor que  $\sigma(\bar{S})$  - e neste caso  $\bar{S}$  é a aproximação final para o conjunto  $\bar{X}_p$  [4] e [37].

Embora não se tenha a segurança de uma “terminação ótima”, argumenta-se que o procedimento pode terminar otimamente. Isto porque, as sucessivas substituições de vértices são análogas às substituições no algoritmo (ou método) Simplex da Programação Linear [22].

### 3.2.1.10.3 - Formulação do Problema “Mini-sum” (P-Medianas) como um problema de Programação Inteira - um Método Exato

Seja  $[\epsilon_{ij}]$  a matriz de alocação tal que

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j \text{ é alocado a } x_i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso,

$$\epsilon_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{se } x_i \text{ é um vértice mediana;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja  $[D_{ij}]$  a matriz peso-distância de ordem  $n \times n$ ,<sup>12</sup> isto é, a matriz onde cada coluna  $j$  já está multiplicada pelo peso  $v_j$  do vértice  $j$ .

O problema da P-Mediana toma a forma:

$$\min. \quad Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (17)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij} = 1 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ii} = p \quad (19)$$

$$\varepsilon_{ij} \leq \varepsilon_{ii} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \quad (21)$$

Sobre estas restrições:

- a restrição (18) assegura que qualquer vértice  $x_j$  é alocado a um e somente um vértice mediana;
- a restrição (19) garante que existem exatamente  $p$  vértices;
- a restrição (20) diz que  $\varepsilon_{ij} = 1$  somente se  $\varepsilon_{ii} = 1$ , isto é, a restrição assegura que as alocações só podem ser feitas a vértices medianas;
- a restrição (21) impõe a integralidade:  $\varepsilon_{ij}$  é variável binária que assume valor zero ou um.

Se  $[\bar{\varepsilon}_{ij}]$  é a solução ótima para o problema proposto acima, então a  $p$ -mediana é

<sup>12</sup> Na aplicação do método das P-Mediana no problema de localização de CDDs na empresa ECT, no Capítulo 4, é utilizada a Abordagem do Conjunto Viável: Serão escolhidos  $M$  lugares (CEPs) candidatos (possíveis) à localização de CDDs, dentre um conjunto de  $N$  ( $N > M$ ) lugares a serem atendidos pelos CDDs. Veremos que nossa matriz peso-distância é então de ordem  $M \times N$ . E sendo assim, se fosse adotada a formulação aqui em 3.2.1.10.3 os índices “ $i$ ” e “ $j$ ” assumiriam, respectivamente, valores de 1 até  $M$  e de 1 até  $N$ .

$$\overline{X_p} = \{ x_i, \text{ tal que } \overline{\varepsilon_{ii}} = 1 \}.$$

Observação: Quando a condição (21) for escrita como  $\varepsilon_{ij} \geq 0$ , então o problema acima é um Problema de Programação Linear.<sup>13</sup>

---

<sup>13</sup> Mais informações sobre a utilização da Programação Linear no problema de P-Mediana pode ser vista em Binfaré Neto (1993, pag. 34-35).

### 3.2.2 - O Problema de Cobertura de Conjunto

#### 3.2.2.1 - Conceitos e definições preliminares

##### 3.2.2.1.1 - Cobertura de um conjunto e Partição de um conjunto

Seja  $X$  um conjunto finito. Uma cobertura do conjunto  $X$  é uma família  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_L\}$  de subconjuntos de  $X$  tal que:

$$X = \bigcup_{i=1}^L S_i. \quad (3.1)$$

Numa tal cobertura, dizemos que os  $S_i$  são os conjuntos de cobertura.

Se além da condição (3.1) tem-se

$$S_i \cap S_j = \emptyset, \text{ para todo } i \neq j \quad (3.2)$$

então dizemos que  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_L\}$  é uma partição de  $X$ : uma reunião disjunta de subconjuntos de  $X$ .

##### 3.2.2.1.2 - Conjunto dominante, Conjunto Dominante Minimal, número de dominância e o Conjunto Dominante Minimum

Um conjunto dominante ou conjunto externamente estável [4 e 34] em um grafo  $G = (X, \Gamma)$  é um conjunto de vértices  $S \subseteq X$  que domina todos os vértices em  $G$ , isto é, se  $x_j \notin S$ , então existe um arco de um vértice em  $S$  até  $x_j$  - ou o vértice está incluído no conjunto  $S$  ou então é adjacente a um ou mais vértices. Portanto,  $S$  é um conjunto dominante se:

$$S \cup \Gamma(S) = X, \quad (3.3)$$

onde para cada  $x_i$ ,  $\Gamma(x_i)$  representa conjunto de todos os vértices  $x_j$  tais que  $(x_i, x_j)$  é um arco em  $G$ .

Os conjuntos  $\{x_1, x_4, x_6\}$ ,  $\{x_1, x_4\}$ ,  $\{x_3, x_5, x_6\}$  são exemplos de conjuntos dominantes do grafo da Fig. 3A a seguir

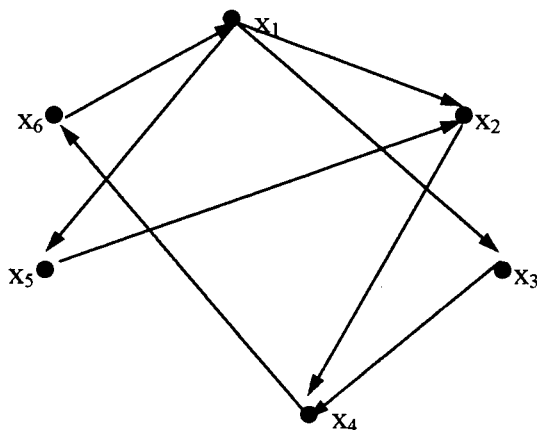


Fig. 3A

Um conjunto é chamado de conjunto dominante minimal se não existe nenhum outro conjunto dominante que o contém. Isto é, se  $S$  é um conjunto dominante e se  $H \subseteq S$  é outro conjunto que satisfaz a condição (3.2), então deve ter-se obrigatoriamente  $H = S$ . Em outras palavras, pode se dizer que um conjunto dominante minimal é um conjunto dominante tal que nenhum vértice possa ser removido sem destruir sua propriedade de dominância! <sup>14</sup>

Como exemplo, vê-se na Fig. 3A que os conjuntos  $\{x_1, x_4\}$  e  $\{x_3, x_5, x_6\}$  são conjuntos dominante minimal, mas o conjunto  $\{x_1, x_4, x_6\}$  não é minimal. Pode ser constatado aqui que em geral em um grafo qualquer pode existir mais de um conjunto dominante minimal.

Observa-se, também, na Fig. 3A que os conjuntos dominantes minimais não precisam ter o mesmo número de elementos (vértices).

<sup>14</sup>

Outras considerações ou proposições decorrentes da definição de conjunto dominante minimal podem ser encontradas em **Rabuske [34]**.

Considerando a família  $\Psi$  formada por todos os conjuntos dominantes minimais em um grafo  $G$ , o Número de Dominância  $\alpha[G]$  deste grafo  $G$  é definido como o menor dos números de elementos (vértices) destes conjuntos. Isto é,

$$\alpha[G] = \min_{S \in \Psi} |S|,$$

onde  $|S|$  é a cardinalidade ou número de elementos (vértices) do conjunto  $S$ .

E o conjunto (ou os conjuntos) para o qual cabe o valor  $\alpha$  será denotado por  $S^*$ , e denominado Conjunto Dominante Minimum. Por exemplo, na Fig. 3.A  $\alpha[G] = 2$ , correspondendo ao conjunto dominante minimum  $\{x_1, x_4\}$ .

### 3.2.2.2 - O que é o Problema de Cobertura de Conjunto e o que são os Objetivos de Cobertura ?

Dado um grafo  $G = (X, \Gamma)$ , pode ser interessante encontrar subconjuntos do conjunto  $X$  de vértices de  $G$  que: em primeiro lugar, satisfaçam a condição (3.1); e em segundo lugar, possuam alguma outra propriedade pré-definida.

Possuir uma tal propriedade, satisfazendo a condição (3.1), é o Objetivo de Cobertura. E o problema que se origina quando se deseja encontrar tais subconjuntos é o Problema de Cobertura de Conjunto.

#### 3.2.2.2.1 - A matriz de Cobertura e o Problema de Cobertura

Seja  $G = (X, \Gamma)$  um grafo onde  $X = \{r_1, r_2, \dots, r_M\}$  é o conjunto de seus vértices. A matriz de cobertura  $T$  tem seus elementos  $t_{ij}$  sendo 1 ou 0 dependendo se o vértice

$x_j$  satisfaz ou não o “covering objective” com respeito ao vértice  $x_i$ , isto é se o vértice  $x_i$  cobre ou não o vértice  $x_j$ .

Uma vez criada a matriz de cobertura, então tem-se resumidamente que :

*Um problema de cobertura é o problema onde para a solução do mesmo, deve ser escolhido, na matriz de cobertura, o menor número de colunas que cubram todas as linhas no sentido de que cada linha contenha pelo menos uma entrada de 1 sob pelo menos uma destas colunas escolhidas. [4]*

### 3.2.2.2.2 - Conjunto dominante e o Problema de Cobertura de Conjunto

Por exemplo, uma propriedade (ou melhor, um “covering objective”<sup>15</sup> interessante para um subconjunto  $S$  de  $X$  é de que  $S$  tenha a menor cardinalidade ( $|S|$ )<sup>16</sup> possível e tal que todo vértice de  $X-S$  pode ser visitado ou alcançado de um vértice de  $S$  por um arco simples. Isto é, deseja aqui encontrar o número de dominância de  $S$ .

Observação: No exemplo acima está se falando em Problema de Cobertura ou Conjunto Dominante? A resposta para esta pergunta fica óbvia apartir do comentário em Christofides (1975, p.49, seção 5.61): “....o problema de encontrar o conjunto de vértice dominante minimum de um grafo  $G$  é um Problema de Cobertura de Conjunto com a matriz de cobertura sendo a transposta da matriz de adjacência de  $G$  com todas as entradas da diagonal sendo iguais a 1.”

<sup>15</sup> Exemplos de outras propriedades e os correspondentes problemas que se originam quando se deseja encontrar subconjuntos que satisfaçam tais propriedades são apresentados em [34].

<sup>16</sup> Se a cada vértice de  $S_j \in \mathcal{V}$ , está associado um custo (positivo)  $c_j$ , o próprio problema de cobertura é assim um “proxy” para o mínimo custo obtido quando se encontra o conjunto dominante minimum  $S^*$  [20].

### 3.2.2.2.3 - Dois exemplos de Problema de Cobertura

Como para cada propriedade (e exigências adicionais) - a qual é a definição de Objetivo de Cobertura - se origina um problema, o exemplo de propriedade dado acima mesmo teórico acaba sendo um problema particular dentro de uma classe de problemas decorrente da também teórica definição do Problema de Cobertura de Conjunto. Não obstante este mesmo exemplo teórico comparece na prática nas mais variadas formas como aplicação. Vejamos dois exemplos (a) e (b), bem “distintos” - na prática.

#### **Exemplo (a)** <sup>17</sup>

Suponhamos que uma organização deseja contratar intérpretes para tradução do Francês, Alemão, Grego, Italiano, Russo e Chinês para o Inglês. Suponhamos também, que existem cinco candidatos possíveis A, B, C, D e E. Cada candidato requer um certo salário e fala somente um subconjunto do conjunto de línguas acima. Deseja-se então determinar quais destes candidatos são suficientes para atenderem (cobrirem) o objetivo que é o de traduzir todas as línguas para o Inglês com o menor custo. Suponhamos, para simplificar, aqui neste exemplo, que o salário a ser pago a cada um dos intérpretes é o mesmo e que as línguas que eles falam são como é mostrado na matriz (quadro) T abaixo onde o “ $t_{ij} = 1$ ” significa que o intérprete  $j$  fala a língua  $i$  (e “ $t_{ij} = 0$ ”, caso contrário).

<sup>17</sup> Este exemplo (a) é o mesmo presente em Christofides (1975, pag. 47), mas a identificação de cada intérprete com o conjunto de línguas que o mesmo fala já é uma adaptação por nós feita com o propósito de chegar até o exemplo (b).



Língua	Intérpretes				
	A	B*	C*	D*	E
Francês	1	0	1	1	0
Alemão	1	1	0	0	0
Grego	0	1	0	0	0
Italiano	1	0	0	1	0
Espanhol	0	0	1	0	0
Russo	0	1	1	0	1
Chinês	0	0	0	1	1

Identifiquemos cada intérprete com o conjunto de línguas que o mesmo fala - subconjunto do conjunto total das sete línguas. Desta forma, dizemos que:

$A = \{\text{Francês, Alemão, Italiano}\};$

$B = \{\text{Alemão, Grego, Russo}\};$

$C = \{\text{Francês, Espanhol, Russo}\};$

$D = \{\text{Francês, Italiano, Chinês}\};$

$E = \{\text{Russo, Chinês}\}.$

Vê-se, evidentemente, que nenhum destes subconjuntos, individualmente, é conjunto dominante pois, nenhum intérprete fala todas as sete línguas: Nenhuma coluna da matriz é constituída somente do elemento “1”. Também, nenhum dos conjuntos  $S=A \cup B$ ,  $S=A \cup C$ ,  $S=A \cup D$ ,  $S=A \cup E$ ,  $S=B \cup C$ ,  $S=B \cup D$ ,  $S=B \cup E$ ,  $S=C \cup D$ ,  $S=C \cup E$  e  $S=D \cup E$  é dominante, pois a condição “ $\sum t_{ij} \geq 1$ ” não é satisfeita para nenhum deles:  $t_{51} + t_{52} = 0 < 1$  por exemplo para  $S=A \cup B$ ;  $t_{31} + t_{33} = 0 < 1$  para  $S=A \cup C$  e assim por diante.

Aumentando (acrescentando) o número de subconjuntos de dois para três, vê-se que somente  $S^*=B \cup C \cup D$  é o único conjunto dominante, já que os demais conjuntos  $S=A \cup B \cup C$ ,  $S=A \cup B \cup D$ ,  $S=A \cup B \cup E$ ,  $S=A \cup C \cup D$ ,  $S=A \cup C \cup E$ ,  $S=B \cup C \cup E$  e  $S=B \cup D \cup E$  não são conjuntos dominantes porque não satisfazem a condição “ $\sum t_{ij} \geq 1$ ”:  $t_{71} + t_{72} + t_{73} = 0 < 1$ , para  $S=A \cup B \cup C$ ;  $t_{51} + t_{52} + t_{54} = 0 < 1$ ,

para  $S = A \cup B \cup D$ ; e assim por diante. E obviamente  $S^*$  é o conjunto dominante minimum pois, qualquer outro conjunto dominante deverá ter no mínimo quatro elementos.

### Exemplo (b)

Esta mesma matriz  $T$  pode representar um problema de localização de facilidades onde os subconjuntos {Francês, Alemão, Italiano}, {Alemão, Grego}, Russo},..., {Russo, Chinês} seriam sub-regiões da região total {Francês, Alemão, Grego, Italiano, Espanhol, Russo, Chinês}. Estas sub-regiões seriam locais possíveis (candidatos) para a localização de facilidades. Neste novo contexto, os intérpretes A, B, C, D e E desempenhariam o papel das possíveis facilidades. Assim o número ótimo de facilidades corresponde ao número de dominância  $\alpha[S] = 3$  e as facilidades sendo  $B^*$ ,  $C^*$  e  $D^*$  como solução ótima.

#### 3.2.2.3 - O Problema de Partição de Conjunto

Na solução ótima dos exemplos acima pode-se observar que:  $\{\text{Russo}\} = B \cap C \neq \emptyset$  e  $\{\text{Francês}\} = C \cap D \neq \emptyset$ . Isto, equivale a observar na matriz que:  $t_{62} + t_{63} = 2 > 1$ , para  $B \cap C$ ; e  $t_{13} + t_{41} = 2 > 1$ , para  $C \cap D$ .<sup>18</sup>

A condição " $\sum t_{ij} \geq 1$ " não é muito forte, permitindo-se que o somatório seja maior ou igual a um. Assim, obviamente por se tratar da solução ótima, em ambos os exemplos acima a condição " $\sum t_{ij} \geq 1$ " está satisfeita. Mas se fosse exigido que tal somatório seja exatamente igual um,  $S = B \cup C \cup D$  deixaria de ser solução ótima.

<sup>18</sup> No que diz respeito ao exemplo (b), é impossível evitar as interseções pela própria construção do exemplo.

Se a condição “ $S_i \cap S_j = \emptyset$ , para todo  $i \neq j$ ” - isto é a condição (3.1) ou equivalentemente a condição (3.4) que será dada mais adiante - é adicionada a definição do Problema de Cobertura de Conjunto, o problema toma o nome “Problema de Partição de Conjunto”. Isto é, exige-se que se particione o conjunto X como reunião disjunta.

**Em resumo:**

*Um problema de partição é um caso especial de um problema de cobertura, onde para a solução do mesmo, deve ser escolhido, na matriz de cobertura, o menor número de colunas que cubram todas as linhas no sentido de que cada linha contenha exatamente uma entrada de 1 sob pelo menos uma destas colunas escolhidas. [4]*

### 3.2.2.3.1 O Problema de Cobertura formulado como um Problema de Programação Linear

Talvez ainda seja interessante aqui, para melhor entendimento do Problema de Cobertura ou melhor do Problema de Partição, apresentar uma formulação deste problema de Partição como um Problema de Programação Linear Binária (Inteira 0-1). Não pretende-se, aqui, usar métodos de PL 0-1 para resolução do problema de partição. Uma tal formulação para uma matriz de cobertura de ordem  $M \times N$  seria:

$$\begin{aligned} \text{minimize } Z &= \sum_{j=1}^N c_j \xi_j \\ \text{Sujeito a: } \sum_{j=1}^N t_{ij} \xi_j &= 1 \quad i = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $c_j \geq 0$  é o custo (positivo) associado a cada  $S_j \in \mathfrak{T}^{19}$ , e  $\xi_j$  é 1 (ou 0), dependendo se  $S_j \in \mathfrak{T}'$  (ou se  $S_j \notin \mathfrak{T}'$ ); e  $t_{ij} = 1$  (ou 0) dependendo se o vértice  $r_i \in S_j$  (ou  $r_i \notin S_j$ ); e onde  $\mathfrak{T} = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$  é uma família de subconjuntos de vértices de um conjunto  $X = \{r_1, r_2, \dots, r_M\}$ .

O que se pretende aqui é então encontrar um conjunto de conjuntos de cobertura, isto é, uma subfamília  $\mathfrak{T}' = \{S_{j_1}, \dots, S_{j_k}\}$  de  $\mathfrak{T}$  de custo mínimo sendo

$$\sum_{j=1}^k c_j \xi_j$$

A condição ou restrição (3.4) diz respeito ao Problema de Partição. E a relaxação desta restrição, isto é permitir que  $\sum t_{ij} \xi_j$  seja igual ou maior que 1, é que devolve o Problema de Partição ao Problema de Cobertura mais geral. [4]

### 3.2.2.3.2 - Outro exemplo de Objetivo de Cobertura e alternativas para o Objetivo de Cobertura

Segundo Hall (1985, p.357), “...virtualmente qualquer padrão de serviço define um problema de cobertura e alternativas para a distância padrão não mudam a estrutura fundamental do problema; elas variam somente aonde os “uns” e “zeros” são substituídos na matriz de cobertura.”. Este mesmo autor - em seu artigo que trata da localização de terminais para transporte, onde os lugares candidatos à

<sup>19</sup> No caso de localização de CDDs (facilidades),  $c_j$  representaria o custo do aluguel de um CDD localizado em um CEP(k). Cada CDD deve estar em correspondência com a circunscrição formada - na solução do problema de cobertura - por um conjunto  $S_j$  de CEPs que cobrem o CEP(k). E como os CDDs são aqui considerados “padrão” no que diz respeito ao custo que é função do número de carteiros ou distritos, todos estes custos  $c_j$  iguais ao custo total médio que então figurariam - se fosse usado a Programação Linear - no somatório como sendo igual a 1. Em outras palavras, não existe a matriz de custo mas tão somente a matriz de cobertura constituída de elementos 0 ou 1 - mesmo porque nossos dois “approachs” não envolvem modelo de custos.

*localização são cidades - dá dois exemplos de alternativas para esta distância padrão a qual é na verdade o Objetivo de Cobertura e que chamaremos de “distância de cobertura”:*

- uma destas alternativas é a “**Facility rank**” em que para cada freguês, lugares são classificados de 1 até N (onde N é o número de lugares candidatos a localização) de acordo com a distância de transporte: todos os fregueses devem ser servidos por uma facilidade a qual está dentro de um “**maximum rank**”. Se por exemplo, o “maximum rank” é igual a cinco, então cada freguês deve ser servido por um dos cinco lugares (ou terminais) mais próximos. Portanto, existem exatamente cinco “uns” em cada linha da matriz de cobertura.

- uma outra alternativa é o “**Flow\*distace**”: O  $\text{fluxo} \times \text{distância}^{20}$  é igual a distância total viajada por todos os itens entre uma cidade e a facilidade mais próxima. E o padrão de serviço iria especificar um máximo para o produto do fluxo - este fluxo é assumido ser proporcional ao produto das populações para cada par de cidade e ele é independente da distância - pela distância. Neste sentido, isto significa que grandes cidades devem ser servidas por terminais mais próximos do que cidades pequenas; e se o fluxo de uma cidade dobra, a distância permitida até o terminal mais próximo é cortada na metade.

### 3.2.2.3.3 Métodos de resolução do Problema de Partição de Conjunto

Vimos que um problema de partição é essencialmente um problema de cobertura. Não obstante, segundo Christofides [4], “a restrição (3.4) é vantajosa

---

<sup>20</sup> Esta alternativa (o “Flow\*distance”) - colocada aqui como um Objetivo de Cobertura - não se aplicaria ao problema de localização de CDDs na empresa ECT porque não existe fluxo de correspondência entre um distrito e outro.

*quando se deseja resolver o problema usando-se métodos de busca em árvore, visto que ela pode permitir o abandono antecipado de ramos potenciais da árvore”.*

Deve-se observar que se  $M$  é o número de vértices possíveis no problema, então exaustivamente teríamos que testar  $M \cdot 2^M$  possibilidades de solução. Isto é, para cada um dos  $2^M$  subconjuntos de  $X$  tem-se que olhar para cada linha da matriz de cobertura - ou seja, para cada vértice - para verificar a condição  $\sum t_{ij} = 1$ . Quando  $M$  é grande, vem então a necessidade de se adotar método com heurística (atalho), com a finalidade, portanto, de acelerar o processo de busca de solução. Uma tal solução por meio de métodos heurísticos pode não ser a ótima ou seja, aquela que se conseguiria esgotando todas as possibilidades. Em muitas situações práticas uma solução assim aproximada satisfaz o problema, e o método que se utilizou de uma heurística para obter tal solução é chamado de método heurístico ou não exato.

### 3.2.2.3.3.1 - Um método computacional

Em Christofides (1975, pag. 40) é descrito um método de busca em árvore não exato - dentre os mais (exatos ou não) propostos por Garfinkel e Nemhauser [12]. A seguir, reproduziremos tal descrição acrescentando, porém, um exemplo.

Seja  $G(X, \Gamma)$  um grafo onde  $X = \{r_1, r_2, \dots, r_M\}$  é o conjunto de todos os vértices do grafo. Dado um vértice  $r_k$ , este é coberto por um certo subconjunto  $S_k$  de vértices de  $X$ . Desta maneira pode-se arranjar  $k$  blocos - na prática, dependendo do Objetivo de Cobertura,  $S_k$  pode ser somente o conjunto  $\{r_k\}$  ou, até mesmo o conjunto vazio caso em que alguns destes blocos podem não existir - consistindo dos subconjuntos (representados por colunas da matriz de cobertura) que contêm o

elemento  $r_k$  mas que não contêm qualquer elemento  $r_1, \dots, r_{k-1}$  (Mais detalhes, ver [4]).

A disposição destes blocos dá origem a um “tableau” inicial que é usado então no algoritmo.

Vejamos a construção do “tableau” inicial através de um exemplo:

Consideremos um conjunto  $R = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_6\}$  e uma família  $\mathfrak{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_5\}$  onde:

$$S_1 = \{r_1, r_2, r_3, r_6\},$$

$$S_2 = \{r_1, r_3, r_5\},$$

$$S_3 = \{r_2, r_3, r_4\},$$

$$S_4 = \{r_3, r_6\} \text{ e}$$

$$S_5 = \{r_6\}.$$

Esta família  $\mathfrak{S}$  não é ainda a família da definição de cobertura dada em 3.2.2.1.1 e que deve cumprir a condição (3.1). Nosso objetivo é encontrar uma subfamília  $\mathfrak{S}'$  desta família  $\mathfrak{S}$ , que sim venha cumprir a condição (3.1).

Agora devemos enumerar a frequência dos vértices nos  $S_j$ :

vértices	frequência
$r_1$	2
$r_2$	2
$r_3$	4
$r_4$	1
$r_5$	1
$r_6$	3

E então tem-se o “tableau” inicial abaixo:

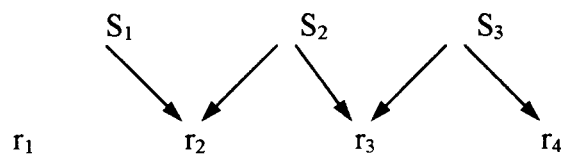
	$S_3$	$S_2$	$S_1$	$S_4$	$S_5$
$r_4$	1	0	0	0	0
$r_5$	0	1	0	0	0
$r_1$	0	1	1	0	0
$r_2$	1	0	1	0	0
$r_6$	0	0	1	1	1
$r_3$	0	1	1	1	0

### Redução do Problema:

Devido a natureza de um problema geral - que não é o caso do exemplo anterior para construção do “tableau” - de cobertura é sempre possível fazer a priori certas deduções e reduções. [4] Vejamos algumas:

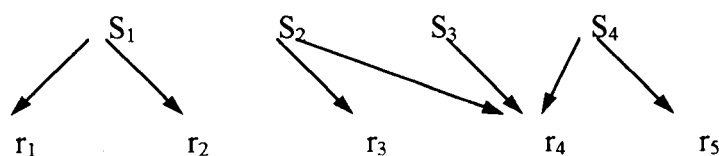
1 - Se para algum  $r_i \in R$ ,  $r_i \notin S_j$  para qualquer  $j = 1, 2, \dots, n$ , então  $r_i$  não pode ser coberto e então não existe solução.

Exemplo:



2 - Se existe  $r_i \in R$  tal que  $r_i \in S_k$  e  $r_i \notin S_j$  para todo  $j \neq k$ , então  $S_k$  deve estar em todas as soluções e o problema deve ser reduzido fazendo  $R = R - \{r_i\}$  e  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S} - \{S_k\}$ .

Exemplo:





$S_1$  é o único que cobre  $r_1$  (e também  $r_2$ ), então  $S_1$  participará da solução ótima. Podemos portanto eliminar a coluna  $S_1$  e a linha  $r_1$  (e também, a linha  $r_2$ ).

3 - Uma modificação no “tableau” inicial, de forma a se ordenar os blocos numa ordem crescente de número de conjuntos  $S_j$  contidos em cada bloco, melhora o desempenho do algoritmo. A fim de que o “tableau” permaneça com as características apresentadas anteriormente, é necessário uma reordenação dos elementos  $r_i$  (linhas), de acordo com a nova sequência dos blocos.

4 - Sendo que a ordenação dos conjuntos  $S_j$ , dentro dos blocos será feita de forma que os custos sejam crescentes.

#### 3.2.2.3.3.2 - Um método não computacional

Existe sim um tal procedimento para selecionar localizações de facilidades utilizando heurísticas que tem por objetivo minimizar o número de facilidades necessárias para satisfazer padrões de serviços. O propósito do artigo de Hall [20] é apresentar este seu novo procedimento, que segundo o próprio autor a principal vantagem é a simplicidade: o procedimento pode ser implementado manualmente com um compasso e um mapa.

Mencionamos acima a fonte onde tal método (ou procedimento) pode ser encontrado, porém não transcreveremos a descrição.

### 3.3 Considerações finais sobre o Capítulo 3

Temos as seguintes considerações a fazer:

#### A) Sobre o problema “Mini-sum” e o caso da alocação de Medianas

Como o grafo representativo do Problema de Localização de CDDs da empresa ECT não é grande, decidiu-se adotar para resolver tal problema a Representação pela Matriz de Custos visto na Seção 3.1.2.1.

O objetivo da abordagem “Mini-sum” (P-Mediana) quando aplicada ao Problema de Localização de CDDs da empresa ECT é minimizar o percurso médio improdutivo dos carteiros se deslocando dos seus CDDs às suas respectivas regiões de entrega (os distritos). Temos que ter a consciência de que esse valor médio deve satisfazer o problema para o objetivo ora fixado, mas que pela característica da Média pode existir um valor para o percurso improdutivo de um carteiro individual excedendo a respectiva Média (ou seja ao percurso médio improdutivo) - daí não garantindo outros padrões de serviço que evidentemente somente seriam garantidos dentro da abordagem “O Problema de Partição de Conjunto” que se preocupa com as distâncias (percursos) que podem exceder a um limite previamente fixado.

#### B) Sobre o Problema de Partição de Conjunto

Em aplicações prática acontece a necessidade de se determinar um conjunto dominante minimum dos vértices de um grafo e, então um algoritmo só precisa construir tal conjunto.<sup>21</sup> No problema de localização de CDDs na ECT, quando enfocado aqui como um problema de partição, existem duas alternativas: Primeiro,

---

<sup>21</sup> No caso de conjuntos independente maximal (ver definição em [4] ou [34]), é de interesse em aplicações práticas que algoritmos gerem uma lista completa de tais conjuntos!

poderíamos colocar de início como um problema de encontrar o conjunto dominante minimum de vértices (localizações viáveis ou candidatas) do grafo com as localizações ótimas dos CDDs, e posteriormente colocá-lo (redefiní-lo) como um problema de cobertura segundo observação da Seção 3.2.2.2.2. Desejaria-se então, que um tal algoritmo apenas se limitasse a encontrar o conjunto dominante minimum. Não obstante, ao encontrar-se o conjunto mínimo de CDDs ou seja o conjunto dominante minimum dos locais dentre os locais viáveis, a área total da cidade ficaria subdividida em subconjuntos que seriam então as circunscrições de maior abrangência para cada um destes CDDs; Segundo, partir diretamente como um problema de cobertura em que se deseja além disso que os conjuntos de cobertura sejam disjuntos. E aqui também o objetivo é encontrar o menor número destes conjuntos de cobertura, obtendo-se assim, igualmente, as circunscrições de maior abrangência para os CDDs.

Em ambas as alternativas acima, é bem provável que o percurso médio improdutivo venha ser grande.<sup>22</sup>

Com respeito ao problema de localização de CDDs para a ECT, é aproveitada a idéia de **“maximum rank”**. Este é definido aqui de maneira diferente e é de fato um **Objetivo de Cobertura**, no sentido de que é independente da **Distância de Cobertura**. Por causa da restrição quanto ao número de carteiro ou distritos alocados a um CDD mencionada na Seção 2. - restrição sobre a capacidade física do CDD - diremos que um CEP (lugar viável à localização) cobre um outro CEP se a distância de cobertura

<sup>22</sup> A abordagem no “p maximal cover problem” mencionado na Seção 1.2 do Capítulo 1 é diferente em dois aspectos da abordagem “the Set Partioning Problem” quando direcionada a resolver o problema de localização de CDDs na ECT: No problema de localização de CDDs na ECT, nós não explicitamos a demanda  $h_i$  que aparece na função objetivo do “p maximal cover problem”; desejamos uma partição da área total da cidade em circunscrições, objetivo o qual não é alcançado pela primeira abordagem acima. Não obstante, estas duas abordagens teriam algo em comum: quer-se o máximo de distritos (dentro destes estão obviamente os fregueses ou clientes da ECT.) para compôr as circunscrições numa distância radial de cada CDD que não deve ultrapassar uma distância  $T$  previamente estipulada; e além disso na abordagem “P-maximal cover”, para cada  $P$  fixo maximiza-se o número de fregueses.

É importante, também, deixar bem claro que não estamos resolvendo o problema “Mini-max”.

não excede um valor previamente determinado e se dentro desta distância radial que os compreende o número total dos distritos (mais precisamente, dos carteiros!) dos CEPs somados não ultrapassa o limite da capacidade física do CDD. Se por exemplo, o “maximum rank” é igual a quarenta, então isto deve significar que cada CDD deve servir no máximo os quarenta distritos mais próximos.

**Observação:** Em Hall [20], de acordo com a sua definição de “ranking cover”, o mesmo afirma que a principal diferença entre as aplicações do “ranking cover” e a Distância de Cobertura é que o “ranking cover” fornece mais terminais em áreas onde cidades estão próximas das outras, e menos terminais onde cidades estão mais separadas do que a Distância de Cobertura. E aqui com a nossa definição de “ranking cover” colocada com respeito ao número de CEPs a serem atendidos pela facilidade (o CDD), o “ranking cover” então é atingido antecipadamente à Distância de Cobertura onde CEPs pequenos estão todos muito próximos uns dos outros.

No que diz respeito ao exemplo (b), já foi dito através de nota de rodapé que é impossível evitar as interseções pela própria construção do exemplo. Não obstante, pela definição acima é bem provável que venha haver muitas interseções quando pensar-se em problema de partição. E por conseguinte tais interseções devem ser removidas de alguma maneira antes de (ou concomitantemente) construir a matriz de cobertura.

C) Sobre o problema “Mini-sum” (e o caso da Localização de Medianas) X o  
Problema de Partição de Conjunto

Estes dois enfoques são diferentes. No primeiro, é obvio que a distância média percorrida pelos carteiros desde os  $P$  CDDs (as  $P$  facilidades, mais precisamente as  $P$ -Medianas) até os seus respectivos distritos ou regiões de entrega diminui a medida que aumentamos este número  $P$ ; e no segundo o objetivo é atender (cobrir) todos os distritos de entrega com o menor número de CDDs possíveis de modo a respeitar padrões de serviço.

O que há de comum entre estes dois enfoques? Os dois fornecem uma partição da área total da cidade: no caso das  $P$ -Medianas, tem-se  $P$  CDDs que em correspondência com os respectivos CEPs alocados formam assim as  $P$  circunscrições disjuntas e que somadas completam a área total da cidade; a abordagem “O Problema de Partição de Conjunto” como o próprio nome já diz, trata-se também, de particionar a área total da cidade em circunscrições e a cada uma correspondendo uma facilidade no nosso caso o CDD.

## CAPÍTULO 4

### Desenvolvimento de uma Aplicação Prática

#### **4.1 - Aplicação dos enfoques na ECT: a busca de soluções para o problema de localização de CDDs.**

##### **4.1.1 - Hipóteses básicas para ambos os enfoques**

- Os distritos (ou regiões de entrega) dos carteiros já estão pré-definidos - já estão construídos pelo SD mencionado na Seção 2.1.5;
- Cada carteiro atende um único distrito - sua região de entrega, onde terminadas as entregas ele retorna ao seu respectivo CDD;
- Cada circunscrição corresponde (está identificada com) um único CDD que deverá localizar-se dentro da circunscrição e atender exclusivamente os distritos que compõe esta circunscrição.

##### **4.1.2 - Lugares viáveis para localização de CDDs**

Seguindo a abordagem do conjunto finito ou viável, e de acordo com as recomendações ou critérios da ECT p/ seleção dos lugares para a localização de CDDs (ver Cap. 2), dentre o número total de CEPs existentes no sistema, sabe-se que, em geral, nem todos preenchem os requisitos para a localização de um CDD. Em outras palavras, de modo geral se  $N$  é o número total de CEPs no sistema, talvez apenas um número  $M$  ( $M < N$ ) destes são potencialmente viáveis (candidatos) para a localização de CDDs.

### 4.1.3 - Definições preliminares

#### 4.1.3.1 - Centróide de um CEP

Centróide de um CEP é um ponto com um certa vizinhança (raio) de tal forma a minimizar o percurso médio dos carteiros deste ponto até os distritos que compõe este CEP.

Observações: a) Este ponto definido acima pode até coincidir como centro de gravidade espacial da área que compreende o CEP. No entanto, o conceito de centro de gravidade espacial não exerce nenhuma influência na definição dada acima, mesmo porque de acordo com os critérios da ECT que falam sobre a seleção ou escolha dos lugares para a localização dos CDDs (ver Seção 2.4) sempre que possível devem ser considerados outros fatores como por exemplo as condições de acessibilidade.

#### 4.1.3.2 - Distância entre CEPs

##### 4.1.3.2.1 - Definição de distância usada na abordagem “Mini-sum” (P-Mediana)

Sejam  $x_i$  e  $x_j$  os centróides do CEP(i) e CEP(j), respectivamente. Com o objetivo de sermos o mais preciso possível definimos a distância entre o CEP(i) e o CEP(j) como a distância  $\mathcal{D}$  que aparece na expressão abaixo:

$$\mathcal{D} = \frac{\sum_{k=1}^{N(j)} d(x_i, \text{distr}(k, j))}{N(j)} \quad (1)$$

onde,

$N(j)$  = número de distritos do CEP(j);

$\text{distr}(k, j)$  = k-ésimo distrito do CEP(j).

Em outras palavras  $\bar{D}$  é a média das distâncias de  $N(j)$  carteiros individualmente se deslocando desde o CDD se localizado no lugar “ $x_i$ ” até seus respectivos  $N(j)$  distritos que compõe o CEP(j). <sup>1</sup> Esta definição parece ser razoável já que esta média considera o deslocamento médio de um carteiro dentro do seu próprio CEP onde o CDD venha estar localizado: é a distância  $\bar{D}$  entre o CEP(i) e ele mesmo.

Porém, em geral existe pouca diferença entre a distância média  $\bar{D}$  que representa o deslocamento de um carteiro até a seu distrito - e a distância entre os centróides. Neste sentido, e também evitando assim tomar todas as inúmeras medições das distâncias  $d(x_i, \text{distr}(k,j))$ , optamos adotar a distância entre dois CEPs distintos como a distância entre seus respectivos centróides: é a distância real “ $D$ ” obtida por aproximação pela distância “ $D_E$ ” ou a distância retangular “ $D_R$ ” (conhecida também pelo nome de métrica metropolitana) através de regressão linear simples com os dados medidos (observados) - isto é, uma amostra constituída de pares de pontos escolhidos aleatoriamente no mapa da cidade - de  $D$  e  $D_R$ , bem como os dados observados de  $D$  e  $D_E$ , chega-se respectivamente às relações  $D(D_R) = a.D_R + e$ , bem como a relação  $D(D_E) = \hat{a}.D_E + \hat{e}$ . <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Na abordagem “Mini-sum” (P-Mediana), o objetivo é minimizar o tempo improdutivo médio dos carteiros de ida e volta desde os CDDs até seus respectivos distritos. Não obstante, a distância  $D$  está coerente com o objetivos desta abordagem.

<sup>2</sup> Mais informações a respeito do conceito de métrica, mais especificamente das métricas  $D_E$  e  $D_R$  podem ser vistas em **Novaes [29]** e em **Larson e Odoni [24]**. Resumidamente, dados dois pontos  $A$  e  $B$  num sistema cartesiano de eixos  $X$  e  $Y$ , a distância  $D_E$  entre estes dois pontos é a distância em linha reta que os une; e  $D_R$  mede o deslocamento entre  $A$  e  $B$  feito paralelamente aos eixos, podendo ser escolhido qualquer roteiro entre  $A$  e  $B$  desde que não haja retrocesso nas direções dos dois eixos:  $D_R = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ , onde  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$  e  $y_B$  são as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ .

Dizemos que  $D_R$  (ou  $D_E$ ) aproxima  $D$  quando o erro “ $e$ ” (ou  $\hat{e}$ ) é tão pequeno que é considerado zero. Além disso, a exigência deste erro ser “zero” vem do fato de desejarmos que tanto  $D_R$  como  $D_E$  sejam uma métrica cujo um dos postulados é de que tanto  $D_R(x,x)=0$  e  $D_E(x,x)=0$ .

Existe uma relação teórica (**Larson e Odoni, 1981**) entre  $D_E$  e  $D_R$ , onde é estimado a média ou valor esperado para o quociente  $D_R/D_E$  em  $4/\pi \cong 1,2732$  quando se considera dois pontos fixos no plano contínuo e todas as rotações deste plano em um ângulo  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . O importante de tudo é que esta relação se mantém na prática quando se deseja passar de  $D_R$  para  $D_E$  ou vice-versa: depois de feito o teste de regressão entre  $D$  e  $D_R$ , e  $D$  e  $D_E$ , obtém-se a razão média  $\bar{r} = D_R/D_E \cong 1,2732$  levando-se em consideração toda a amostra constituída dos pares de pontos escolhidos aleatoriamente num mapa de uma cidade.

Se numa cidade é fixado um sistema de coordenadas, então a distância  $D_R$  se adequa mais a sistemas viários em que os logradouros são paralelos aos eixos; por outro lado, se os logradouros assumem formas ou



Para distritos próximos ao CDD - digamos num raio de 500m ou 0,5km -, os carteiros em geral, se deslocam a pé ou de bicicleta; e para distritos fora desta faixa de quilometragem, os carteiros normalmente fazem uso do transporte coletivo (ônibus). Diante destas duas situações, decidimos incorporar o conceito de “velocidade” para melhor medir o percurso improdutivo do carteiro, no sentido de torná-lo o mais próximo da realidade. Mais precisamente, trabalharemos com o tempo-de-viagem  $t_{ij}$  de ida e volta entre os CEPs  $i$  e  $j$  definido por:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= D / 4,0, & \text{se } D \leq 0,5 \text{ km;} \\ D / 40,0 + \tau, & & \text{se } D > 0,5 \text{ km,} \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $D = a.D_R$  (ou  $\hat{a}.D_E$ ); os números 4,0 e 40,0 são respectivamente as velocidades (em km/h) para viagens a pé e de ônibus, isto é, dentro e fora da faixa de 0,5 km;  $\tau$  é um tempo médio de espera gasto nos terminais ou pontos de ônibus, fixado em 15 min. (0,25h) para a ida e 15 min. para a volta.

**Observação:** As medições das distâncias serão feitas no mapa da cidade sempre usando a distância Euclidiana ( $D_E$ ). Não obstante, se teste de regressão indicar que a métrica que melhor aproxima a distância real é a métrica retangular ( $D_R$ ), então continua-se com  $D_E$  mas fazendo a correção de uma para outra dada por:  $D_R / D_E \cong 1,2732$ .

#### Em resumo:

a)  $\mathbb{D}(x_i, x_i) = 0$ , em geral. Isto é dentro de cada CEP( $i$ ) os deslocamentos individuais dos carteiros desde um CDD localizado em “ $x_i$ ” até seus próprios distritos é desprezível;

---

direções estranhas aos eixos, então convém adotar a métrica  $D_E$ . Isto é intuitivo e comprovado sempre que é feito o teste de regressão entre  $D$  e  $D_R$ ,  $D$  e  $D_E$ : o erro entre os dados (as distâncias  $D_R$  e  $D_E$  entre os pares de pontos) observados e os calculados diz qual a métrica que melhor aproxima a distância real.

b)  $d(x_i, \text{distr}(k, j)) = d(\text{distr}(k, j), x_i)$ , isto é a distância de cada um dos  $N(j)$  carteiros de ida e volta do distrito “k” do CEP(j) ao CDD localizado em “ $x_i$ ” é admitida ser a mesma.

c)  $D(x_i, x_j) = D(x_j, x_i)$ , igualdade que deve ser entendida como uma aproximação para  $\mathbf{D}$ , ainda reforçada por (b);

#### 4.1.3.2.2 - Definição de distância usada na abordagem “O Problema de Partição de Conjunto”

Aqui a distância entre CEPs é a distância real entre os centróides, embora também aproximada pela métrica Euclidiana DE ou pela métrica retangular (ou metropolitana) DR. Na verdade, usaremos a definição de tempo de viagem, a qual aparece em 4.1.3.2.1.

#### 4.1.4 - O Problema “Mini-sum” (P-Medianas) na ECT

##### 4.1.4.1 - A Matriz de distância (distâncias Euclidianas entre CEPs)

Seja  $N$  o número total de CEPs no sistema. E seja  $M$  ( $M < N$ ) o número destes CEPs que são viáveis à localização de CDDs.

Primeiro, enumeremos de 0 até  $M-1$  os CEPs viáveis e de 0 até  $N-1$  os não viáveis.<sup>3</sup> Temos que considerar apenas as ligações diretas (entre pares de vértices adjacentes) - as arestas, no caso por causa da consideração (c) da Seção 4.1.3.2 - no conjunto dos  $M$  CEPs viáveis e as ligações diretas entre cada um dos  $M$  CEPs viáveis

<sup>3</sup> É esta a maneira de marcar os CEPs na planta da cidade desenhada em computador. Não obstante, os CEPs viáveis serão marcados em vermelho e os não viáveis serão marcados em azul. Com estes cuidados fica mais fácil distinguir entre um CEP viável e um não viável. Mais detalhes a respeito da origem da utilização da planta da cidade desenhada em computador e a utilização da mesma num aplicativo para gerar as distâncias entre CEPs simplesmente depois de marcados os tais pontos (CEPs) - dispensando assim as entúmeras medições que teriam que ser feitas manualmente - serão dados na Seção 4.1.4.3.3.

com cada um dos  $(N-M)$  CEPs não viáveis. Como por hipótese - consideração (b) ou (c) da Seção 4.1.3.2 - a distância de ida e volta de um carteiro desde o seu CDD até o seu distrito é considerada a mesma, o número total de ligações ou medições a serem estabelecidas entre pares de CEPs distintos é:  $\binom{M}{2} + M(N-M)$ . Nesta soma, estas duas parcelas correspondem respectivamente ao bloco-1 e ao bloco-2 da matriz-DE das distâncias (Euclidianas) de viagem entre os CEPs: se  $j \leq M-1$  então a distancia é entre  $x_i$  e  $x_j$ ; e quando  $j > M-1$  então a distância é entre  $x_i$  e  $y_j$ . Tal matriz é mostrada a seguir.

[	Bloco - 1					Bloco - 2					]
	$x_0$	$x_1$	$x_2$	•	$x_{M-1}$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	•	$y_{N-1}$	
$x_0$	0	$dE_{x_0,x_1}$	$dE_{x_0,x_2}$		$dE_{x_0,x_{M-1}}$	$dE_{x_0,y_0}$	$dE_{x_0,y_1}$	$dE_{x_0,y_2}$		$dE_{x_0,y_{N-1}}$	
$x_1$		0	$dE_{x_1,x_2}$		$dE_{x_1,x_{M-1}}$	$dE_{x_1,y_0}$	$dE_{x_1,y_1}$	$dE_{x_1,y_2}$		$dE_{x_1,y_{N-1}}$	
$x_2$			0		$dE_{x_2,x_{M-1}}$	$dE_{x_2,y_0}$	$dE_{x_2,y_1}$	$dE_{x_2,y_2}$		$dE_{x_2,y_{N-1}}$	
•				0							
$x_{M-1}$	$dE_{x_{M-1},x_0}$	$dE_{x_{M-1},x_1}$	$dE_{x_{M-1},x_2}$		0	$dE_{x_{M-1},y_0}$	$dE_{x_{M-1},y_1}$	$dE_{x_{M-1},y_2}$		$dE_{x_{M-1},y_{N-1}}$	

**Matriz-DE**, onde  $dE_{i,j}$  denota a distância Euclidiana entre CEPs: se  $j \leq M-1$  então a distancia é entre  $x_i$  e  $x_j$ ; e quando  $j > M-1$  então a distância é entre  $x_i$  e  $y_j$ .

#### 4.1.4.2 - A Matriz-T dos tempos entre CEPs ponderada, e o cálculo das P-Medias

A distância  $A$  entre CEPs, em 4.1.3.2.1, é média de deslocamento de um número  $N(j)$  de carteiros do CDD para o respectivo CEP( $j$ ). Adotando-se então o peso

$v_j$  de cada CEP(j) como sendo o número de distritos do CEP - isto é o número  $N(j)$  dos carteiros deste CEP -, a expressão  $v_j \cdot \sum a_{ij}$  devolve a soma dos deslocamentos (tempos improdutivos) destes carteiros.

Os seguintes passos são executados até chegar na matriz-T dos tempos entre CEPs:

- 1 - encontrar a matriz-DE das distâncias Euclidianas entre CEPs;
- 2 - se através do teste de regressão for indicada a métrica DE como a que mais aproxima a distância real ,então multiplica-se toda matriz-DE pelo coeficiente “â”;  
senão, ou seja a métrica que mais aproxima a distância real é DR, multiplica-se toda a matriz-DE por “â” e em seguida multiplicada por  $1,2732 \cong DR/DE$ ”.
- 3- transformar a matriz de distância para a matriz-T correspondente à matriz de tempos usando-se a regra (2).
- 4- finalmente, multiplica-se toda a matriz-T por dois, computando-se assim o tempo de ida mais o tempo de volta.

#### **4.1.4.3 - Aplicação da abordagem “Mini-sum” (P-mediana) na cidade de Florianópolis-SC**

A cidade Florianópolis será considerada em duas partes: uma parte sendo a Ilha e a outra sendo o Continente. Isto é feito porque não é de interesse que se tenha um CDD numa destas partes atendendo distritos da outra parte.

Existem atualmente (jan./1996) na cidade de Florianópolis cerca de 22 CEPs na parte que corresponde a Ilha e 6 CEPs na parte Continental. Existem 59 distritos na

Ilha, sendo que em média 3 distritos por faixa de CEP. Existem 21 distritos na parte continental, sendo que em média 3,5 distritos por faixa de CEP.

**Observação:** Deve ser frisado que faltam muitos CEPs e por conseguinte muitos distritos na planta (ou mapa) que compreende a Ilha, haja visto como já foi dito anteriormente que o mesmo não está completo - as regiões mais distantes do centro da cidade, como algumas áreas urbanas e todas as praias e a zona rural não estão presentes no mapa. No **Anexo-5** é mostrado a planta de logradouros da cidade em escala reduzida, onde a parte “achurada” representa a parte de Ilha cujas regiões de entrega estão faltando.

Por causa do exposto na observação acima, a aplicação da abordagem “Mini-sum” (P-Medianas) se restringirá apenas na parte continental da cidade de Florianópolis.

Dentre todos os 6 CEPs, apenas 4 são candidatos à localização de CDDs na parte continental. Sendo **P** o número ótimo de CDDs que se deseja localizar de modo a minimizar o tempo médio improdutivo de viagem dos carteiros desde os CDDs até seus respectivos distritos e diante da restrição quanto ao número de carteiros alocados ao CDD - Seção 2.5 - fica evidente que  $P \geq 1$  para o Continente. Cada CEP será indexado: de 0 até 3 para os viáveis e de 0 até 1 para os não viáveis para a parte continental da cidade. <sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Na verdade a aplicação será feita somente com os dados (CEPs) que constam da planta de logradouros da cidade desenhada em computador pelo IPUF, a qual está incompleta no que diz respeito a parte da Ilha. Além disso, trabalharemos com os dados de um distritamento mais antigo onde constava apenas 6 CEPs mas apenas 19 distritos na parte continental da cidade.

**Observação:** quando iniciamos o estudo e coleta de dados (março/1994), existiam apenas três CDDs. Hoje (jan./1996) a situação é diferente: foi acrescentado mais um CDD - do Sul da Ilha - (ver **ANEXO-6** a relação atual dos CDDs com suas respectivas circunscrições, isto é, os CEPs com seus distritos). Não obstante, hoje já é realidade a triagem automatizada realizada no CT em substituição à triagem manual outrora feita pelos carteiros nos CDDs, e por conseguinte a nossa proposta antes futurística - quando da introdução (Seção 1.1) deste trabalho, onde começávamos falando do projeto da empresa ECT de implantar um sistema de triagem automatizada no CT - tornou-se cedo uma realidade. Não obstante, no artigo de **Rosenfield [35]** sobre o Estudo de Caso para o Serviço Postal Norte Americano, a centralização no que diz respeito a questão da triagem

#### 4.1.4.3.1- Dois exemplos em tamanho reduzido: exemplos (a) e (b)

Consideremos inicialmente a Fig. 4A que representa hipoteticamente uma cidade com 10 CEPs com seus centróides  $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ . O conjunto dos CEPs viáveis é  $M = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ . Todos os centróides dos CEPs são representados por um pequeno círculo com um número no interior para significar o número de distritos em que está subdividido o CEP - este número é o peso do CEP. As ligações “cheias” são entre CEPs viáveis, e as ligações “pontilhadas” para ligar um CEP viável a outros não viáveis.

Suponhamos que teste de regressão mencionado em 4.1.3.2.1 tenha dado a métrica DE como a que melhor aproxima a distância real, com o coeficiente  $\hat{\alpha} = 1,2$ .

Assim, de acordo com (2),  $t_{ij} = D / 4,0$ , se  $D \leq 0,5$  km;

$D / 40,0 + \sigma$ , se  $D > 0,5$  km,

onde  $D = \hat{\alpha} \cdot DE = 1,2 \times DE$ .

Na Fig. 4A, a distância entre um CEP e outro é a distância Euclidiana (DE) expressa em quilômetro.

Observação:  $DE(x_0, x_2)$ ,  $DE(x_0, y_1)$ ,  $DE(x_1, y_0)$ ,  $DE(x_2, y_1)$ ,  $DE(x_2, y_4)$ ,  $DE(x_3, y_1)$ ,  $DE(x_3, y_2)$ ,  $DE(x_3, y_5)$  são menores ou iguais a 0,5 km.



**Exemplo a) Localização de um (01) CDD (uma facilidade)**

Consideremos a matriz abaixo. O vetor dos pesos dos CEPs acima da matriz é para indicar que a matriz já teve suas colunas  $j$  multiplicadas respectivamente pelos pesos  $v_j$ . Cada elemento desta matriz representa as distâncias (agora tempos) mínimas - já ponderadas pelos pesos  $v_j$  - em (7) seção 3.2.1.5

$$d(X_{p,i}; x_j) = \min_{x_i \in X_{p,i}} \{d(x_i, x_j)\}$$

onde  $X_{1,1}=\{x_0\}$ ,  $X_{1,2}=\{x_1\}$ ,  $X_{1,3}=\{x_2\}$ ,  $X_{1,4}=\{x_3\}$  são as combinações possíveis de  $p=1$  elementos do conjunto viável  $X=M$ .

Supondo que se deseje localizar apenas um CDD dentre os quatro lugares viáveis, o resultado ótimo é o CDD localizado em  $x_2$  que tem o menor número de out-transmissão (e de in-transmissão, já que o grafo é não direcionado) **11,9288** calculado por (11) seção 3.2.1.5. Isto é  $x_2$  é a 1-mediana do grafo dado e todos os demais vértices são alocados ao mesmo, conforme mostra Fig. 4B. Não obstante,  $x_2$  é alocado a si próprio e junto com os demais forma a circunscrição atendida pelo seu CDD.

Estando o CDD localizado em  $x_2$ , o tempo ponderado de ida e volta dos carteiros desde este CDD até aos distritos é então  $11,9288 \div (6+4+4+3+4+5+4+4+3+4) \cong 0,291h$ . A ponderação é feita sobre os 41 carteiros (a soma entre parênteses).

Note-se que  $x_0$  poderia ser uma segunda alternativa para localização de um só CDD, com é obvio um certo acréscimo na soma dos tempos: talvez por ser o mais pesado dos quatro, já que dista muito pouco do escolhido  $x_2$ . Já  $x_1$  seria a pior

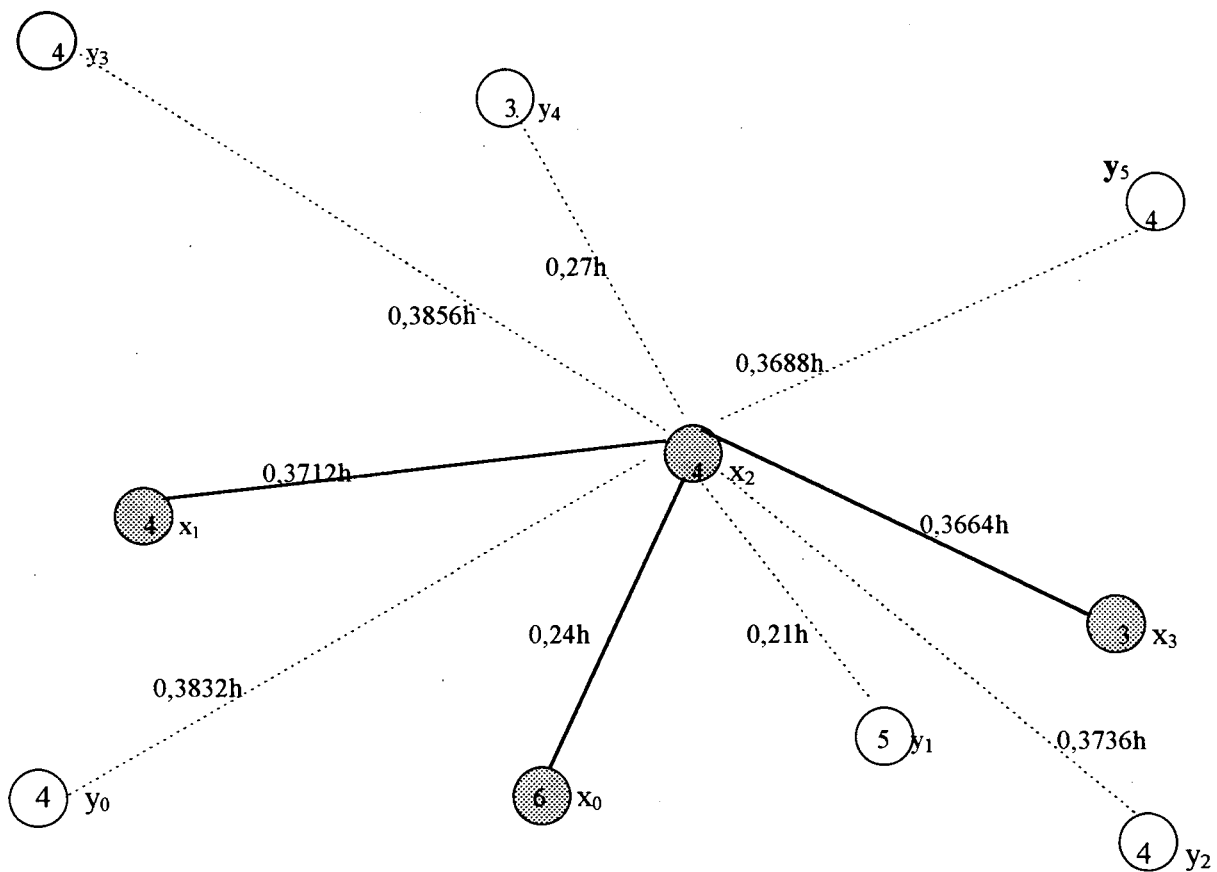


alternativa dentre as quatro: 13,488 representaria 13,1% de acréscimo na soma dos tempos na solução ótima.

$$V = [ 6 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 4 ]$$

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$\Sigma$
$\{x_0\}$	0	1,4656	0,96	1,128	1,4656	1,2	1,504	1,5712	1,1409	1,5616	= 12,1489
$\{x_1\}$	2,1984	0	1,4848	1,2	0,84	1,928	1,6096	1,504	1,1136	1,609	= 13,488
$\{x_2\}$	1,44	1,4848	0	1,0992	1,5328	1,05	1,4944	1,5424	0,81	1,4752	= <b>11,9288</b>
$\{x_3\}$	2,2556	1,6	1,4656	0	1,6192	0,9	0,6	1,6576	1,164	1,2	= 12,4624

**V-T - A matriz dos mínimos tempos (distâncias entre  $M_{p,i}$  e o CEP(j) ponderada**



**Fig. 4B - Subgrafo representando  $M_{1,1} = \{x_2\}$  como a localização ótima para um único CDD: todos os vértices são alocados a  $x_2$ , inclusive ele próprio, formando uma única circunscrição atendida pelo seu CDD. O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de  $11,9288 \div 41 \cong 0,291h$  para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_2$  até os distritos. Observação: os tempos no grafo, são de ida e volta.**

**Exemplo b) Localização de dois (02) CDDs (duas facilidades) <sup>5</sup>**

Suponhamos que se deseje localizar dois CDDs dentre os quatro lugares viáveis que corresponde ao conjunto  $X=M$ . Desta forma tem-se  $P = 2$ , e  $M_2 = \{ \{x_0, x_1\}, \{x_0, x_2\}, \{x_0, x_3\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\} \}$  é o conjunto de possibilidades a serem avaliadas: devem ser calculadas as distâncias (digo, tempos ) de acordo com (7) seção 3.2.1.5

$$d(X_{p,i}; x_j) = \min_{x_i \in X_{p,i}} \{d(x_i, x_j)\}$$

onde os  $M_{p,i}$  são  $M_{2,1}=\{x_0, x_1\}$ ,  $M_{2,2}=\{x_0, x_2\}$ ,  $M_{2,3}=\{x_0, x_3\}$ ,  $M_{2,4}=\{x_1, x_2\}$ ,  $M_{2,5}=\{x_1, x_3\}$ ,  $M_{2,6}=\{x_2, x_3\}$ .

Abaixo é mostrado a matriz V-T dos mínimos tempos ponderada, e em seguida são mostrados os cálculos parciais onde depois de cada linha ser calculada são apresentados os alocados e a soma na linha - os número  $\sigma_0(M_{2,i})$  de acordo com (9) seção 3.2.1.5.

---

<sup>5</sup> Eilon [10] , distingue bem dois problemas quando se deseja localizar mais de uma facilidade, quais sejam: um é localizar duas ou mais facilidades na presença de uma (ou mais) facilidade já existente (instalada, ou localizada); o outro problema é o de determinar a localização de uma só vez de um determinado número de facilidades.

O problema de localização de CDDs na ECT corresponde ao segundo problema menciona acima, e onde portanto não será levantada a questão de custo de realocação para CDDs já existentes!

	X <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	Y <sub>0</sub>	Y <sub>1</sub>	Y <sub>2</sub>	Y <sub>3</sub>	Y <sub>4</sub>	Y <sub>5</sub>	Σ
{X <sub>0</sub> ,X <sub>1</sub> }	0	0	0,96	1,128	0,84	1,2	1,504	1,504	1,1136	1,5616	9,8112
{X <sub>0</sub> ,X <sub>2</sub> }	0	1,4656	0	1,092	1,4656	1,05	1,4944	1,5424	0,81	1,4752	10,4024
{X <sub>0</sub> ,X <sub>3</sub> }	0	1,4656	0,96	0	1,4656	0,9	0,6	1,5712	1,1409	1,2	<b>9,3033</b>
{X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> }	1,44	0	0	1,0992	0,84	1,05	1,4944	1,504	0,81	1,4752	9,7128
{X <sub>1</sub> ,X <sub>3</sub> }	2,1984	0	1,4448	0	0,84	0,9	0,6	1,504	1,1136	1,2	9,8008
{X <sub>2</sub> ,X <sub>3</sub> }	1,44	1,4848	0	0	1,5328	0,9	0,6	1,65776	0,81	1,2	9,6252

**V-T - A matriz dos mínimos tempos (distâncias entre M<sub>2,i</sub> e o CEP(j) ) ponderada**

**Cálculos:**

$$\begin{aligned}
 d(\{x_0, x_1\}, x_2) &= \min \{ d(x_0, x_2), d(x_1, x_2) \} = \min \{ 0,96 ; 1,4848 \} = 0,96 \Rightarrow x_2 \rightarrow x_0 \\
 d(\{x_0, x_1\}, x_3) &= \min \{ d(x_0, x_3), d(x_1, x_3) \} = \min \{ 1,128 ; 1,2 \} = 1,128 \Rightarrow x_3 \rightarrow x_0 \\
 d(\{x_0, x_1\}, y_0) &= \min \{ d(x_0, y_0), d(x_1, y_0) \} = \min \{ 1,4656 ; 0,84 \} = 0,84 \Rightarrow y_0 \rightarrow x_1 \\
 d(\{x_0, x_1\}, y_1) &= \min \{ d(x_0, y_1), d(x_1, y_1) \} = \min \{ 1,2 ; 1,928 \} = 1,2 \Rightarrow y_1 \rightarrow x_0 \\
 d(\{x_0, x_1\}, y_2) &= \min \{ d(x_0, y_2), d(x_1, y_2) \} = \min \{ 1,504 ; 1,6096 \} = 1,504 \Rightarrow y_2 \rightarrow x_0 \\
 d(\{x_0, x_1\}, y_3) &= \min \{ d(x_0, y_3), d(x_1, y_3) \} = \min \{ 1,5712 ; 1,504 \} = 1,504 \Rightarrow y_3 \rightarrow x_1 \\
 d(\{x_0, x_1\}, y_4) &= \min \{ d(x_0, y_4), d(x_1, y_4) \} = \min \{ 1,1409 ; 1,113 \} = 1,1136 \Rightarrow y_4 \rightarrow x_1 \\
 d(\{x_0, x_1\}, y_5) &= \min \{ d(x_0, y_5), d(x_1, y_5) \} = \min \{ 1,5616 ; 1,6096 \} = 1,5616 \Rightarrow y_5 \rightarrow x_0 \\
 \Sigma &= 9,8112
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(\{x_0, x_2\}, x_1) &= \min \{ d(x_0, x_1), d(x_2, x_1) \} = \min \{ 1,4656 ; 1,4848 \} = 1,4656 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_0 \\
 d(\{x_0, x_2\}, x_3) &= \min \{ d(x_0, x_3), d(x_2, x_3) \} = \min \{ 1,128 ; 1,0992 \} = 1,128 \Rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \\
 d(\{x_0, x_2\}, y_0) &= \min \{ d(x_0, y_0), d(x_2, y_0) \} = \min \{ 1,4656 ; 1,5328 \} = 1,4656 \Rightarrow y_0 \rightarrow x_0 \\
 d(\{x_0, x_2\}, y_1) &= \min \{ d(x_0, y_1), d(x_2, y_1) \} = \min \{ 1,2 ; 1,05 \} = 1,05 \Rightarrow y_1 \rightarrow x_2 \\
 d(\{x_0, x_2\}, y_2) &= \min \{ d(x_0, y_2), d(x_2, y_2) \} = \min \{ 1,504 ; 1,4944 \} = 1,4944 \Rightarrow y_2 \rightarrow x_2 \\
 d(\{x_0, x_2\}, y_3) &= \min \{ d(x_0, y_3), d(x_2, y_3) \} = \min \{ 1,5712 ; 1,5424 \} = 1,5424 \Rightarrow y_3 \rightarrow x_2 \\
 d(\{x_0, x_2\}, y_4) &= \min \{ d(x_0, y_4), d(x_2, y_4) \} = \min \{ 1,1409 ; 0,81 \} = 0,81 \Rightarrow y_4 \rightarrow x_2 \\
 d(\{x_0, x_2\}, y_5) &= \min \{ d(x_0, y_5), d(x_2, y_5) \} = \min \{ 1,5616 ; 1,4752 \} = 1,4752 \Rightarrow y_5 \rightarrow x_2 \\
 \Sigma &= 10,4024
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\{x_0, x_3\}, x_1) &= \min \{ d(x_0, x_1), d(x_3, x_1) \} = \min \{ 1,4656; 1,6 \} = 1,4656 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_0 \\
d(\{x_0, x_3\}, x_2) &= \min \{ d(x_0, x_2), d(x_3, x_2) \} = \min \{ 0,96; 1,4656 \} = 0,96 \Rightarrow x_2 \rightarrow x_0 \\
d(\{x_0, x_3\}, y_0) &= \min \{ d(x_0, y_0), d(x_3, y_0) \} = \min \{ 1,4656; 1,6192 \} = 1,4656 \Rightarrow y_0 \rightarrow x_0 \\
d(\{x_0, x_3\}, y_1) &= \min \{ d(x_0, y_1), d(x_3, y_1) \} = \min \{ 1,2; 0,9 \} = 0,9 \Rightarrow y_1 \rightarrow x_3 \\
d(\{x_0, x_3\}, y_2) &= \min \{ d(x_0, y_2), d(x_3, y_2) \} = \min \{ 1,504; 0,6 \} = 0,6 \Rightarrow y_2 \rightarrow x_3 \\
d(\{x_0, x_3\}, y_3) &= \min \{ d(x_0, y_3), d(x_3, y_3) \} = \min \{ 1,5712; 1,6576 \} = 1,5712 \Rightarrow y_3 \rightarrow x_0 \\
d(\{x_0, x_3\}, y_4) &= \min \{ d(x_0, y_4), d(x_3, y_4) \} = \min \{ 1,1409; 1,164 \} = 1,1409 \Rightarrow y_4 \rightarrow x_0 \\
d(\{x_0, x_3\}, y_5) &= \min \{ d(x_0, y_5), d(x_3, y_5) \} = \min \{ 1,5616; 1,2 \} = 1,2 \Rightarrow y_5 \rightarrow x_3 \\
\sum &= \boxed{9,3033}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\{x_1, x_2\}, x_0) &= \min \{ d(x_1, x_0), d(x_2, x_0) \} = \min \{ 2,1984; 1,44 \} = 1,44 \Rightarrow x_0 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_1, x_2\}, x_3) &= \min \{ d(x_1, x_3), d(x_2, x_3) \} = \min \{ 1,2; 1,0992 \} = 1,0992 \Rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_1, x_2\}, y_0) &= \min \{ d(x_1, y_0), d(x_2, y_0) \} = \min \{ 0,84; 1,5328 \} = 0,84 \Rightarrow y_0 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_2\}, y_1) &= \min \{ d(x_1, y_1), d(x_2, y_1) \} = \min \{ 1,928; 1,05 \} = 1,05 \Rightarrow y_1 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_1, x_2\}, y_2) &= \min \{ d(x_1, y_2), d(x_2, y_2) \} = \min \{ 1,6096; 1,4944 \} = 1,4944 \Rightarrow y_2 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_1, x_2\}, y_3) &= \min \{ d(x_1, y_3), d(x_2, y_3) \} = \min \{ 1,504; 1,5424 \} = 1,504 \Rightarrow y_3 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_2\}, y_4) &= \min \{ d(x_1, y_4), d(x_2, y_4) \} = \min \{ 1,1136; 0,81 \} = 0,81 \Rightarrow y_4 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_1, x_2\}, y_5) &= \min \{ d(x_1, y_5), d(x_2, y_5) \} = \min \{ 1,6096; 1,4752 \} = 1,4752 \Rightarrow y_5 \rightarrow x_2 \\
\sum &= 9,7128
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\{x_1, x_3\}, x_0) &= \min \{ d(x_1, x_0), d(x_3, x_0) \} = \min \{ 2,1984; 2,256 \} = 2,1984 \Rightarrow x_0 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_3\}, x_2) &= \min \{ d(x_1, x_2), d(x_3, x_2) \} = \min \{ 1,4448; 1,4656 \} = 1,128 \Rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_3\}, y_0) &= \min \{ d(x_1, y_0), d(x_3, y_0) \} = \min \{ 0,84; 1,6192 \} = 0,84 \Rightarrow y_0 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_3\}, y_1) &= \min \{ d(x_1, y_1), d(x_3, y_1) \} = \min \{ 1,928; 0,9 \} = 0,9 \Rightarrow y_1 \rightarrow x_3 \\
d(\{x_1, x_3\}, y_2) &= \min \{ d(x_1, y_2), d(x_3, y_2) \} = \min \{ 1,6096; 0,6 \} = 0,6 \Rightarrow y_2 \rightarrow x_3 \\
d(\{x_1, x_3\}, y_3) &= \min \{ d(x_1, y_3), d(x_3, y_3) \} = \min \{ 1,504; 1,6576 \} = 1,504 \Rightarrow y_3 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_3\}, y_4) &= \min \{ d(x_1, y_4), d(x_3, y_4) \} = \min \{ 1,1136; 1,164 \} = 1,1136 \Rightarrow y_4 \rightarrow x_1 \\
d(\{x_1, x_3\}, y_5) &= \min \{ d(x_1, y_5), d(x_3, y_5) \} = \min \{ 1,6096; 1,2 \} = 1,2 \Rightarrow y_5 \rightarrow x_3 \\
\sum &= 9,8008
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(\{x_2, x_3\}, x_1) &= \min \{ d(x_2, x_1), d(x_3, x_1) \} = \min \{ 1,44; 2,256 \} = 1,44 \Rightarrow x_0 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_2, x_3\}, x_2) &= \min \{ d(x_2, x_2), d(x_3, x_2) \} = \min \{ 1,4848; 1,6 \} = 1,4848 \Rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_2, x_3\}, y_0) &= \min \{ d(x_2, y_0), d(x_3, y_0) \} = \min \{ 1,532; 1,6192 \} = 1,5328 \Rightarrow y_0 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_2, x_3\}, y_1) &= \min \{ d(x_2, y_1), d(x_3, y_1) \} = \min \{ 1,05; 0,9 \} = 0,9 \Rightarrow y_1 \rightarrow x_3 \\
d(\{x_2, x_3\}, y_2) &= \min \{ d(x_2, y_2), d(x_3, y_2) \} = \min \{ 1,4944; 0,6 \} = 0,6 \Rightarrow y_2 \rightarrow x_3 \\
d(\{x_2, x_3\}, y_3) &= \min \{ d(x_2, y_3), d(x_3, y_3) \} = \min \{ 1,5424; 1,6576 \} = 1,5424 \Rightarrow y_3 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_2, x_3\}, y_4) &= \min \{ d(x_2, y_4), d(x_3, y_4) \} = \min \{ 0,81; 1,164 \} = 0,81 \Rightarrow y_4 \rightarrow x_2 \\
d(\{x_2, x_3\}, y_5) &= \min \{ d(x_2, y_5), d(x_3, y_5) \} = \min \{ 1,4752; 1,2 \} = 1,2 \Rightarrow y_5 \rightarrow x_3 \\
\sum &= 9,6252
\end{aligned}$$

A seguir, nas figuras 4C, 4D, 4E, 4F, 4G e 4H são mostradas as configurações com as circunscrições e respectivos CDDs e seus respectivos CEPs alocados. A fig. 4C apresenta a **solução ótima**, e as demais figuras representam outras alternativas!

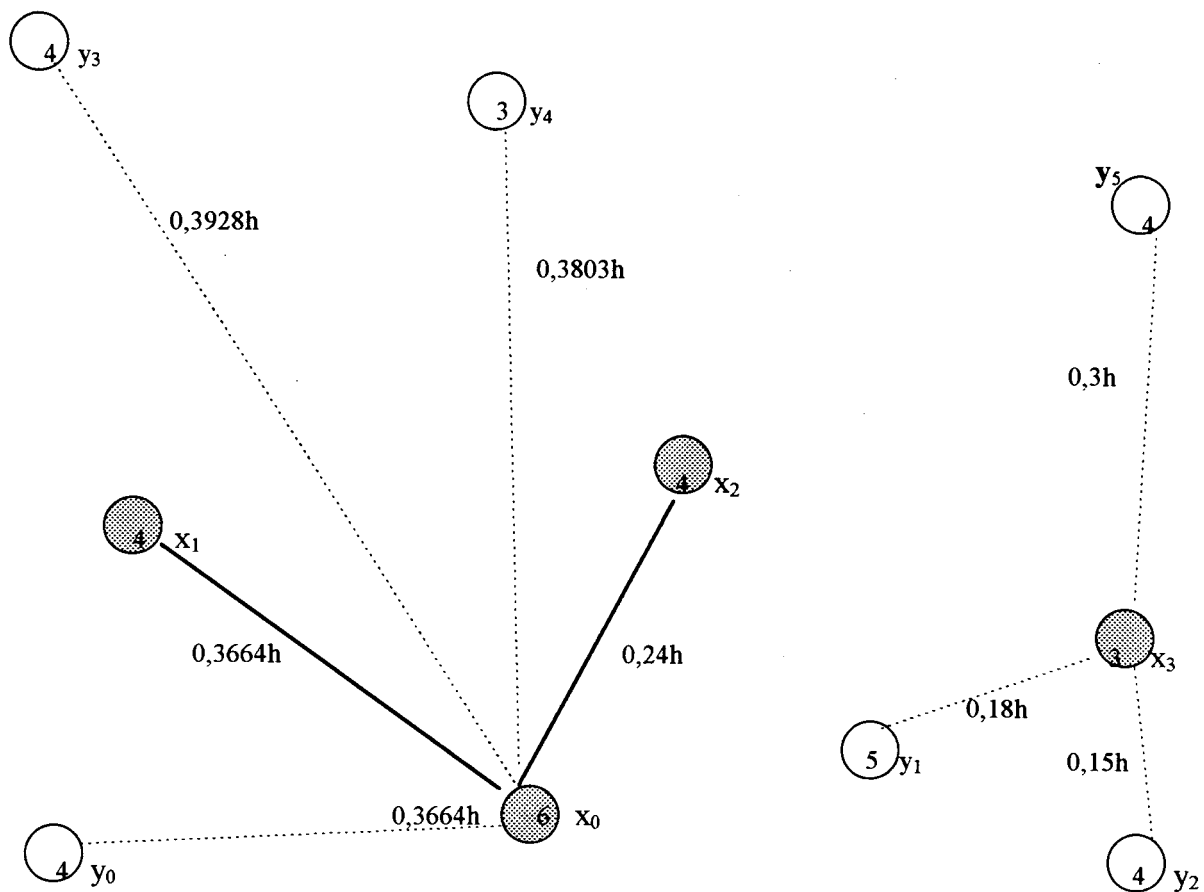
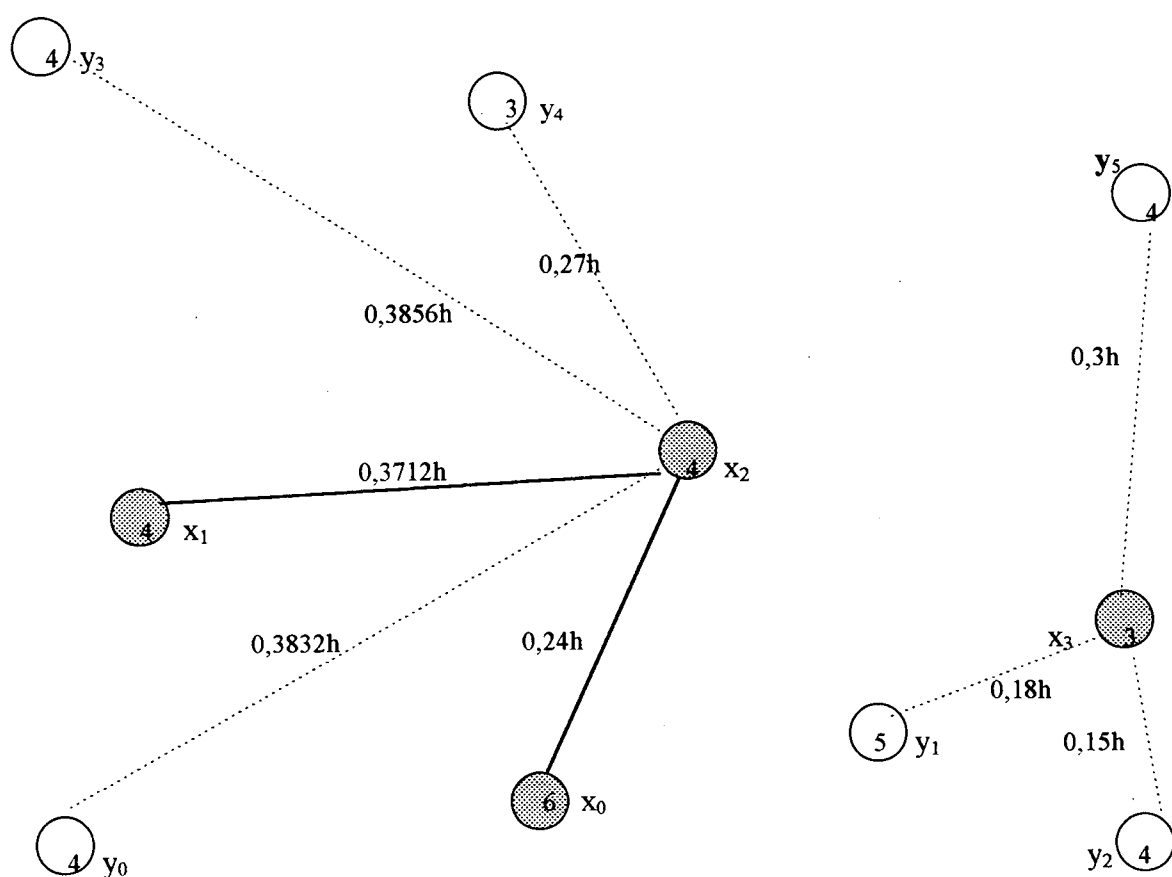
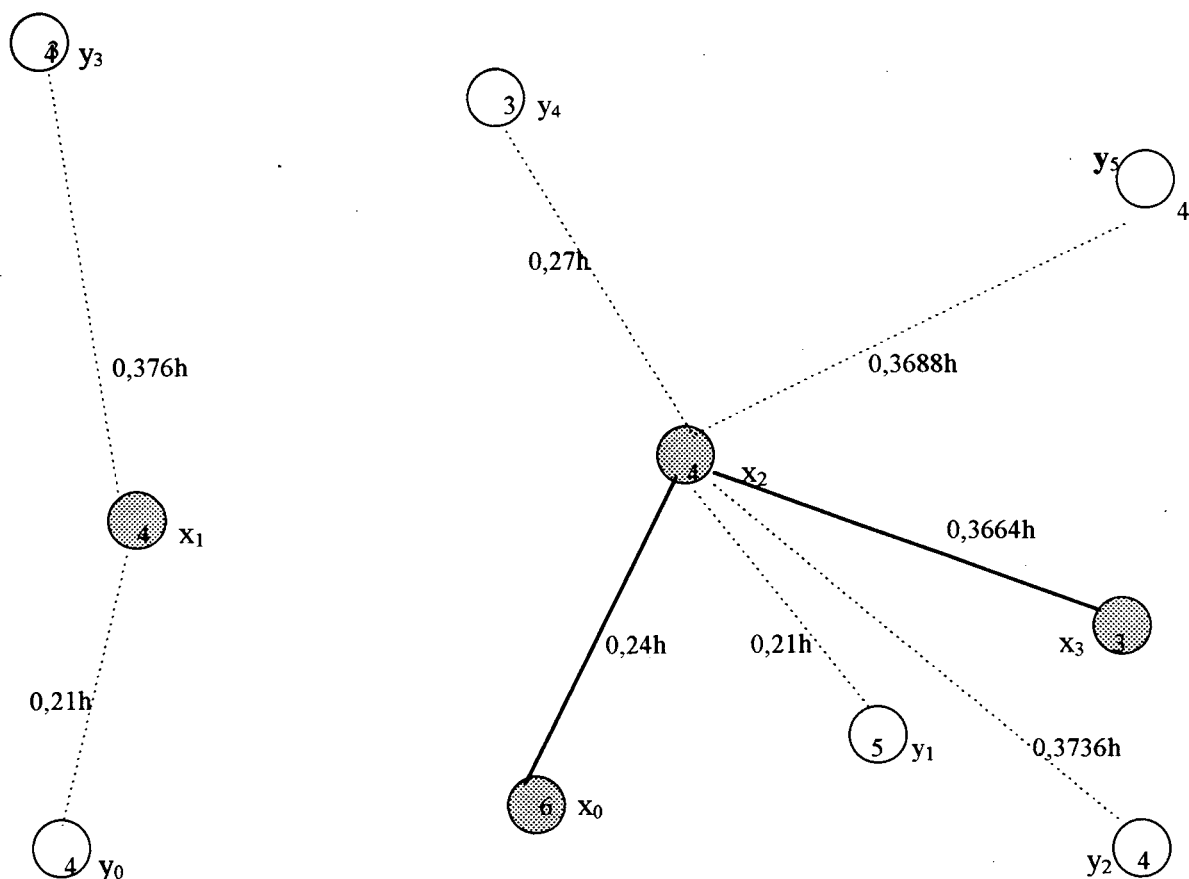


Fig. 4C - Dois subgrafos representando a solução ótima que corresponde a  $\sigma_0(M_{2,3}) = 9,3033$ : é uma partição em duas circunscrições uma com um CDD localizado em  $x_0$  e a outra com o outro CDD localizado em  $x_3$ . O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de:  $9,3033 \div 41 \cong 0,2269h$  para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_0$  e  $x_3$  até os respectivos distritos. Observação: os tempos nos grafos, são de ida e volta.

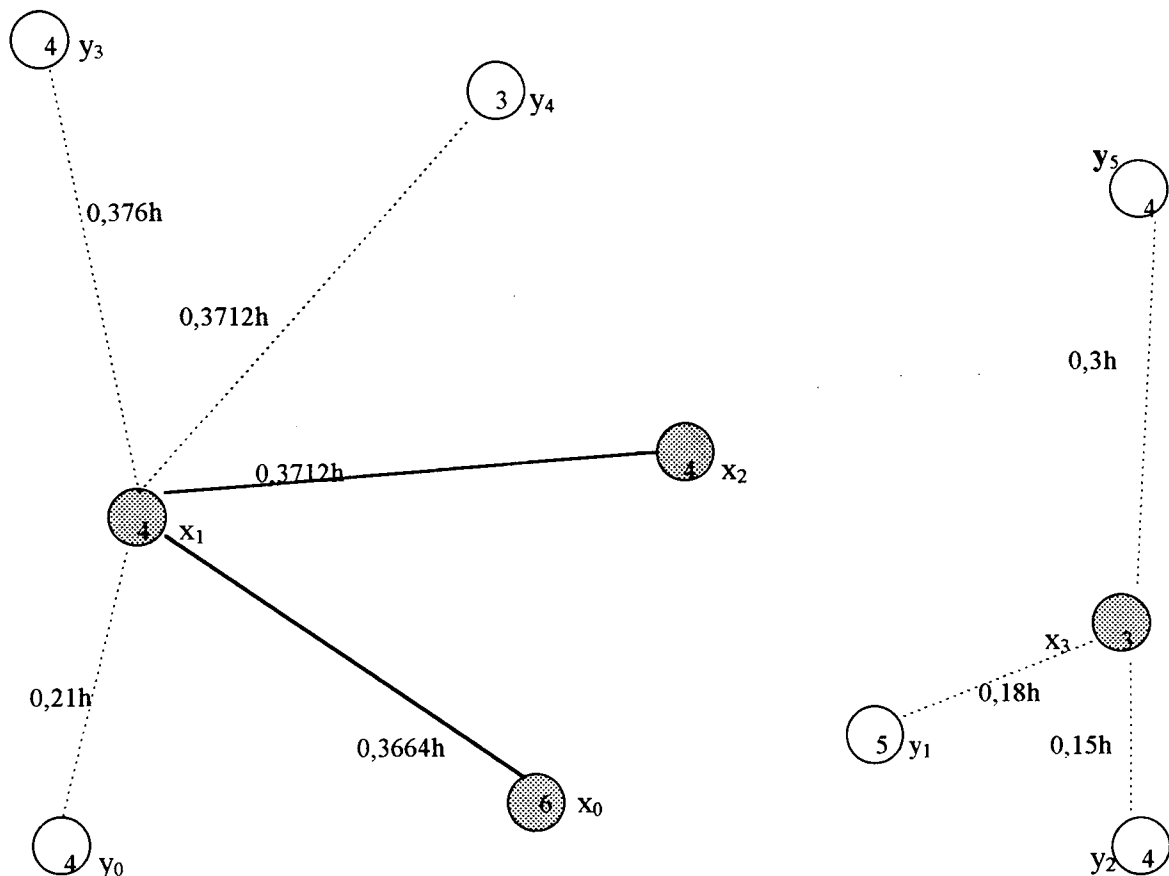


**Fig. 4D - Dois subgrafos representando a segunda melhor solução que corresponde a  $\sigma_0(M_{2,6})=9,6252$ : é uma partição em duas circunscrições uma com um CDD localizado em  $x_2$  e a outra com o outro CDD localizado em  $x_3$ . O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de:  $9,6252 \div 41 \cong \underline{0,2354h}$  (3,46% maior que a solução ótima) para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_2$  e  $x_3$  até os respectivos distritos. Observação: os tempos nos grafos, são de ida e volta.**

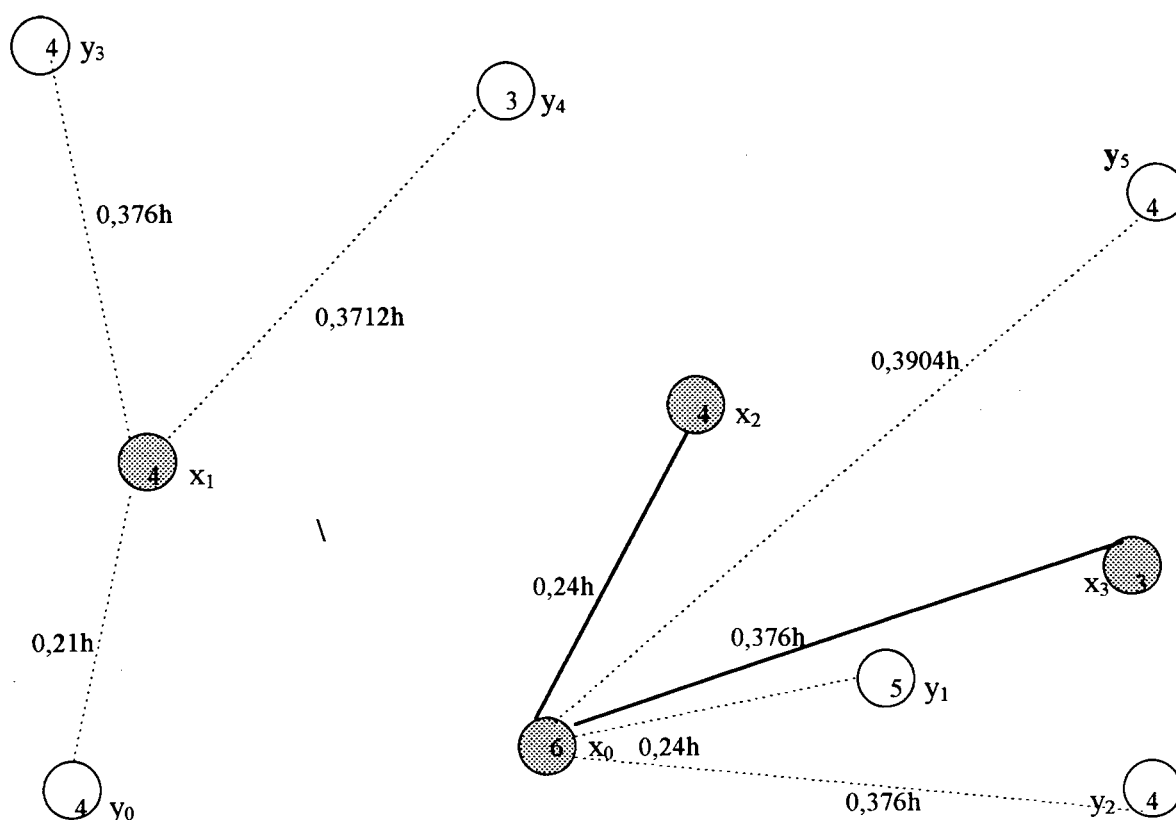




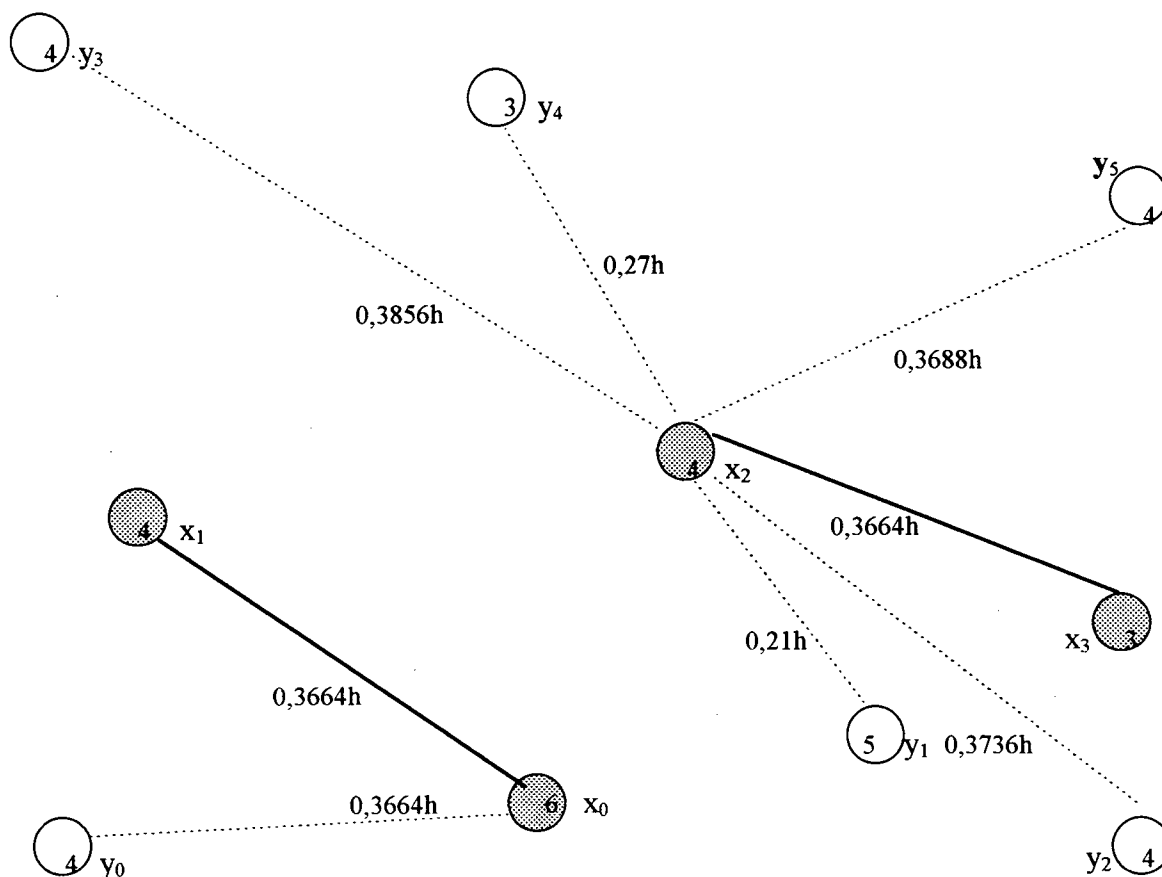
**Fig. 4E - Dois subgrafos representando a terceira melhor solução que corresponde a  $\sigma_0(M_{2,4})=9,7128$ : é uma partição em duas circunscrições uma com um CDD localizado em  $x_1$  e a outra com o outro CDD localizado em  $x_2$ . O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de:  $9,7128 \div 41 \cong \underline{0,2368h}$  (4,40% maior que a solução ótima) para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_1$  e  $x_2$  até os respectivos distritos. Observação: os tempos nos grafos, são de ida e volta.**



**Fig. 4F-** Dois subgrafos representando a quarta melhor solução que corresponde a  $\sigma_0(M_{2,5})=9,8008$ : é uma partição em duas circunscrições uma com um CDD localizado em  $x_1$  e a outra com o outro CDD localizado em  $x_3$ . O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de:  $9,8008 \div 41 \cong 0,2392h$  (5,35% maior que a solução ótima) para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_1$  e  $x_3$  até os respectivos distritos. Observação: os tempos nos grafos, são de ida e volta.



**Fig. 4G - Dois subgrafos representando a quinta melhor solução que corresponde a  $\sigma_0(M_{2,1})=9,8112$ : é uma partição em duas circunscrições uma com um CDD localizado em  $x_0$  e a outra com o outro CDD localizado em  $x_1$ . O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de:  $9,8112 \div 41 \cong \underline{0,2393h}$  (5,46% maior que a solução ótima) para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_0$  e  $x_1$  até os respectivos distritos. Observação: os tempos nos grafos, são de ida e volta.**



**Fig. 4H - Dois subgrafos representando a sexta melhor solução que corresponde a  $\sigma_0(M_{2,2})=10,4024$ : é uma partição em duas circunscrições uma com um CDD localizado em  $x_0$  e a outra com o outro CDD localizado em  $x_2$ . O tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de:  $10,4024 \div 41 \cong 0,2537h$  (14,7% maior que a solução ótima) para carteiros se deslocando, de ida e volta, de  $x_0$  e  $x_2$  até os respectivos distritos. Observação: os tempos nos grafos, são de ida e volta.**

#### 4.1.4.3.2 - A restrição sobre os CDDs

A restrição (16) seção 3.2.1.9 é incorporada no problema de localização de CDDs na empresa ECT, e ela expressa um limite máximo para a capacidade física do CDD quanto ao número de carteiros alocados ao mesmo. Mais precisamente, nenhum CDD pode ter mais do que 40 carteiros, isto é

$$\sum_{X_j \text{ alocados a } X_i} v_j \leq 40 \quad (1)$$

onde  $v_j$  é o peso do CEP que é o número de distritos (ou carteiros) do CEP.

De que maneira é incorporada de fato esta restrição? Olhando para os cálculos parciais no exemplo (b) dá para perceber o momento exato onde tal restrição deveria ser verificada (ou testada). Após cada cálculo parcial onde já tem-se o somatório ( $\Sigma$ ) e os alocados a  $M_{p,i}$  seria verificada a restrição. Sendo a restrição cumprida ou não cumprida, guardar-se-ia assim mesmo a solução correspondente a  $M_{p,i}$  : esta solução poderá eventualmente ter o menor somatório dos tempos, e apareceria uma mensagem “*Observação: tem-se uma solução com menor tempo, embora não satisfaça a restrição de capacidade dos CDDs. A solução é:.....,soma = ..... ,alocados:.....*” de saída do algoritmo a ser implementado. Com respeito aos exemplos (a) e (b) , se fosse atribuído um limite de no máximo 25 carteiros (ou distritos) por CDD, então: em primeiro lugar, não faria sentido localizar um único CDD, isto é deve ter-se  $P \geq 2$ ; em segundo lugar, as terceira, quinta e sexta soluções alternativas anteriormente

Porém, a cada pressionar da tecla “ENTER” o programa fornece uma solução melhor do que a anterior, e isto se repetindo não por muitas vezes - nos testes feitos esta lista de sub-soluções nunca passou de seis - até a solução ótima. Desta forma, optamos por verificar se a restrição é ou não cumprida examinando a lista com as sub-soluções.

#### 4.1.4.3.3 - O algoritmo

Será implementado um único algoritmo, o da Substituição de Vértices. Em geral é grande o número de potenciais localizações viáveis para os CDDs e além disso o número “P” de CDDs requeridos pode ser grande no sentido de que o número de combinações possíveis a serem testadas tornaria o outro algoritmo (o da Enumeração Exaustiva) inviável em termos de tempo computacional. Não obstante, foi dito em (b) Seção 3.2.1.2 que o método da substituição de vértices não garante a solução ótima.

Se optar-se por trabalhar com um número mais reduzido de localizações viáveis escolhidas dentre as potenciais localizações viáveis para executar o algoritmo da Enumeração exaustiva (ou Direta) então, da mesma forma não ter-se-ia garantia do ótimo.

Se o número de localizações viáveis para os CDDs for pequeno, então testes realizados mostraram que de certa forma o algoritmo de Substituição de Vértices se comporta - ou dá resultado equivalente - bastando que para isso o conjunto S inicial de p vértices no algoritmo da Substituição de Vértices seja constituído dos primeiros p vértices da lista dos vértices viáveis. Não obstante, é precisamente este tipo de S inicial que é colocado na implementação do algoritmo da Substituição de Vértices.

vértices da lista dos vértices viáveis. Não obstante, é precisamente este tipo de S inicial que é colocado na implementação do algoritmo da Substituição de Vértices.

#### 4.1.4.3.4 - Critério de parada na otimização

O processo de otimização usando o método das P-medianas é realizado para cada P fixo determinando-se o menor número de transmissão dado em (11) 3.2.1.4:

$$\min_{X_p \subseteq X} \sigma_o(X_p).$$

Diante da restrição (1) a qual limita o número de distritos alocados a um CDD, o processo de otimização deve iniciar por um valor de P que não precisa ser necessariamente igual a 1. Assim, se nos exemplos (a) e (b) o número que limita o número de distritos alocados a um CDD fosse de 25, então não teria sentido tentar localizar um único CDD: deveríamos iniciar com  $P \geq 2$ .

Sabe-se que quanto maior for o número P de CDDs, menor será a soma ou média das distâncias no processo de otimização para o problema “Mini-sum”. E então é preciso um critério de parada, isto é, o critério que nos diz qual o momento de parar de incrementar o valor de P. O momento de parar é quando se consegue um valor aceitável para a soma ou média das distâncias, e isto acontece com certeza para a um certo valor de P o qual é então denominado de “ótimo”.

#### 4.1.4.3.5 - Recursos computacionais envolvidos

Além da implementação do algoritmo de substituição de vértices, será implementado um programa adicional que possibilitará entrar com os CEPs viáveis e

os CEPs não viáveis, dispensando as enúmeras medições que seriam feitas manualmente para a construção da matriz de distâncias entre CEPs.

Será utilizado a planta (mapa) dos logradouros da cidade em estudo desenhada com o auxílio de computador pelo IPUF (Instituto Planejamento e Urbanismo de Florianópolis). Mais precisamente, tal planta está guardada em arquivo depois de ter sido desenhada através do software “MacroStation” (da InterGraph).

O software “MacroStation” além de ser um “CAD” (Computer Aided Design), possui um ambiente de desenvolvimento (realmente, com uma linguagem com seus comandos denominada MDL, e o compilador denominado bmake.exe desenvolvido na linguagem “C “). Dentro deste ambiente, implementou-se um programa denominado “**dist.ma**” - um pequeno aplicativo <sup>6</sup> - para a entrada dos CEPs viáveis e não viáveis, onde usando o “mouse” são marcados e nomeados os centróides dos CEPs na planta da cidade. O resultado é então um arquivo com as informações sobre cada CEP, tais como número  $i$  do centróide  $x_i$  do CEP viável ou do centróide do CEP não viável  $y_i$ . E o mais importante, o arquivo com a matriz de distâncias (Euclidianas) é gerado automaticamente, com todas as medições feitas pelo software - tais medições exigiriam um serviço braçal muito grande.

---

<sup>6</sup> No **Anexo-3** é mostrado a tela do ambiente do SoftWare “MacroStation” onde o aplicativo foi implementado. Os comandos para marcar, e tomar as distâncias entre os centróides dos CEPs compõe-se dos seguintes botões: o botão superior denominado **POLOS** permite marcar em vermelho os CEPs viáveis; o botão mais abaixo denominado **PERIFERIA** permite marcar em azul os CEPs não viáveis; o último botão denominado **SAIDADISTPOLOPERIF** quando pressionado é o comando para gerar e armazenar a matriz de distâncias Euclidianas.



#### 4.1.4.3.5.1 - arquivos

- Arquivo-1

Este arquivo é do tipo texto e denominado **matrizDE.dpp** contendo, como o próprio nome está dizendo, a matriz-DE de distâncias (Euclidianas) entre CEPs. Além disso, este arquivo contém as informações:

- M, o número de CEPs (vértices) viáveis;
- N, o número total de CEPs (vértices).

Observação: Os valores de M e de N, bem como as distâncias euclidianas são, nesta ordem, as saídas do **aplicativo** desenvolvido com o auxílio do software “MacroStation”. Não obstante, a planta da cidade é atualizada - bastando que o arquivo que a contém seja salvo com nome diferente - com os CEPs (vértices) numerados, segundo os números dos seus respectivos centróides, de 0 até M-1 para os viáveis e de 0 até N-1 para os não viáveis: os CEPs viáveis são marcados de cor vermelho e os não viáveis são marcados de cor azul.

Na verdade, para a cidade de Florianópolis, deveriam ser dois arquivos desta natureza: um para a Ilha e outro para a parte continental. No entanto somente existe um, pois implementaremos o programa P-Mediana somente para a parte continental.

- Arquivo-2

Este arquivo contém as seguintes informações sobre os CEPs:

- código do CEP
- peso (número de distritos) do CEP

- **Arquivo-3**

É o arquivo que contém os vetores das combinações dos **P** CEPs escolhidos dentre os **M** = ..... CEPs viáveis a localização de **P** CDDs.

O espaço de memória requerido depende do produto  $\binom{M}{p}$ .

- **Arquivo-4**

É o arquivo que contém a matriz-T dos tempos de viagem de ida e volta entre CEPs obtida da matriz-DE das distâncias Euclidianas (arquivo-1). Os passos para obtenção desta matriz estão em 4.1.4.2. A ordem de matriz-T é  $M \times N$ , a mesma ordem de matriz-DE.

- **Arquivo-5**

Não existe um tal sexto arquivo para conter a matriz dos alocados. Os alocados são “encontrados” dentro do “Procedure AssociaMediana” e são guardados apenas na memória como as demais variáveis importantes no Programa Principal!

De acordo com a seção 3.2.1.5 a matriz dos alocados é a matriz  $[\epsilon_{ij}]$  de ordem  $P \times N$ . Por exemplo, com respeito a solução ótima  $\{x_0, x_3\}$  do exemplo (b) em 4.1.4.3.1, a matriz dos alocados é mostrada abaixo:

$$\begin{array}{c} x_0 \quad x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \quad y_5 \\ \left[ \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

E esta é a saída no programa para todas as sub-soluções!

- **Arquivo-6**

**Observação:** A matriz V-T dos mínimos tempos ponderada é de  $\binom{M}{p} \cdot N$ . Nos exemplos (a) e (b) em 4.1.4.3.2 a matriz V-T foi calculada, mas no algoritmo das P-medianas propriamente dito tal matriz não será calculada! Precisamos apenas da soma dos elementos de cada linha desta matriz que são os números de transmissão  $\sigma_0(M_{p,i})$ : computacionalmente, cada linha  $i$  é criada,  $\sigma_0(M_{p,i})$  é “guardado” e a linha  $i$  é “destruída”. Portanto um tal sexto arquivo não existe.

- **Arquivo-7**

É o arquivo com a planta da cidade desenhada pelo IPUF através do SoftWare MacroStation. Para a cidade de Florianópolis-SC no nome deste arquivo é **Floripa.dgn**. Este arquivo com esta extensão é próprio do SoftWare “MacroStation” - como um “CAD” - quando se deseja gravar um desenho (no caso o mapa da cidade).

Observação: Este arquivo contém tanto a Ilha como a parte continental da cidade de Florianópolis.

- **Arquivo-8**

Na verdade deveriam ser dois arquivos: **Ilha.dgn** e **Cont.dgn**. Eles guardariam os centróides dos CEPs viáveis “ $x_i$ ” e dos não viáveis “ $y_i$ ” marcados na planta (mapa) quando o Aplicativo que construímos para gerar as distâncias Euclidianas é executado. No entanto somente existirá o segundo pois como já dissemos, o programa será executado apenas na parte continental da cidade.

#### **4.1.4.4.6 - Os resultados computacionais da abordagem “Mini-sum” (P-medianas) na cidade de Florianópolis-SC**

Depois de aplicado o Método de Substituição de Vértices, conforme **Anexo-4** a solução ótima para o número e localização de CDDs para a parte continental da cidade de Florianópolis são os seguintes:

CONTINENTE: Antes de mais nada deve ser dito que dentre os 6 CEPs, apenas 4 são viáveis. Foram marcados os centróides destes 6 CEPs sendo então  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $y_0$ ,  $y_1$ .

Conforme Anexo-4, a solução ótima é: localizar apenas um CDD em  $x_1$ . Não obstante, esta solução vem comprovar como boa a localização atual do CDD a qual está próxima de  $x_1$  - e bem mais próxima da segunda melhor solução que é  $x_0$ . (vide

neste Anexo-4, mapa reduzido mostrando as localizações de  $x_i$ ,  $y_i$  e a localização atual do CDD).

O tempo médio de viagem igual a 30 min. é devido ao CEP de centróide  $x_1$  - com distância zero até seus 4 distritos - que está sendo contado na média ponderada. Isto é,  $30 = 9,65 \div 19$  (e não dividido por  $15=19-4$ ). Esta deve ser realmente a explicação, já que foi atribuído um tempo médio de espera gasto nos pontos de ônibus de 15 min (30 min., contando a ida e a volta). Daí, conclui-se: Atribuímos um tempo médio de espera gasto nos pontos de ônibus e uma velocidade média de viagem de 40 Km/h para os carteiros se deslocando de ônibus, que se estiverem dentro da realidade podem estar nos dando informações sobre as condições de acessibilidade para o percurso feito de ônibus. Mais precisamente, o tempo gasto para um carteiro se deslocar do CDD se localizado em  $x_1$  até seu distrito é em média gasto todo nos pontos de ônibus - e então, o percurso médio improdutivo estaria dependendo unicamente da quantidade de ônibus ou da frequência com que os mesmos circulam.

Observação: Este tempo médio de 30 min. está bem longe do valor estimado pela empresa ECT (ver observação 2.3.3).

#### 4.1.5 - O Problema de Partição de Conjunto na ECT

Primeiramente, deve-se observar que a situação, presente nos exemplos (a) e (b) do Capítulo 3 em que  $B \cap C \neq \emptyset$  e/ou  $C \cap D \neq \emptyset$  (Russo  $\rightarrow$  B e C; Francês  $\rightarrow$  C e D), não deve acontecer na solução do problema de localização de CDDs da ECT. Mais precisamente, de acordo com as hipóteses básicas aqui neste capítulo, dois CDDs distintos não podem atender um mesmo distrito.

Portanto, estamos realmente tratando de um problema de partição. Mas não é uma partição qualquer, pois o problema permanece dentro da classe do denominado problema de cobertura, onde se deseja determinar o menor número de circunscrições - e por conseguinte, de CDDs - de tal forma a cobrir toda aérea da cidade. E aqui, o Objetivo de Cobertura consiste em que nenhuma das regiões de entrega que compõem cada circunscrição tenha uma distância ou tempo de viagem para o carteiro excedendo um determinado valor preestabelecido. Este objetivo chamaremos de Distância de Cobertura <sup>7</sup>, que é a distância exigida para atender os padrões de serviço da ECT, tais como: a regularidade da entrega; a qualidade da entrega e se tal uma distância for arbitrariamente grande pode não sobrar tempo para a efetiva entrega em todos os pontos de entrega. Ainda faz parte do Objetivo de Cobertura a exigência de que nenhum CEP (lugar candidato à localização de um CDD) cobre outro se em seu raio de distância, somados os distritos resulta em um número de distritos que excede a capacidade física do CDD que é de 40 carteiros (ou distritos).

---

<sup>7</sup> Em geral, o objetivo “distância de Cobertura” é uma restrição imposta ao “custo” associado às arestas, no momento de formar a matriz de cobertura. Na prática, este objetivo é usado em problema de localização de facilidades do tipo emergencial como postos de polícia ou corpo-de-bombeiros, hospitais, etc...Não obstante, nada impede que tal objetivo seja usado no problema de localização de CDDs da empresa ECT para assegurar que padrões de serviços sejam cumpridos.

Consideremos outra vez o grafo da Fig. 4A na Seção 4.1.4.3.1 que representa uma cidade hipotética com 10 CEPs e os correspondentes números de distritos para cada um destes CEPs, e imaginemos só por um instante que aí neste grafo não estão marcadas as distâncias. Vemos na Fig. 4C onde é apresentada a solução ótima do problema “Mini-sum” (P-medianas) que o tempo ( improdutivo) de viagem médio ponderado é de 0,2269h para carteiros se deslocando, de ida e volta, dos CDDs localizados em  $x_0$  e  $x_3$  até os respectivos distritos. Não obstante existe uma distância (ou tempo) menor que esta média ponderada que é de 0,15h (de  $x_3$  até  $y_2$ ), e existe uma distância (tempo) maior que esta média ponderada que é de 0,3928h (de  $x_0$  até  $y_1$ ).<sup>8</sup> Esta distância maior de 0,3928h, no exemplo em questão, pode não satisfazer os padrões de serviços exigidos pela ECT: mais precisamente, se fixado um tempo máximo (de ida) para o deslocamento de carteiros de por exemplo 0,1868h o qual corresponde a 0,3736h para a ida e volta, e aplicando a expressão (2) em 4.1.3.2.1 corresponde a uma distância Euclidiana de 0,7 km, então o CEP em  $y_3$ , por exemplo, alocado ao CDD localizado em  $x_0$  vem violar a Distância de Cobertura. Não obstante, se fixado um “rank-cover” de no máximo 20 carteiros (ou distritos) por CDD, então a solução ótima na Fig. 4C do problema “Mini-sum” (P-medianas) não poderia ser solução do problema de cobertura na abordagem “O Problema de Partição de Conjunto”, pois a soma de todos os distritos dos CEPs alocados ao CDD localizado em  $x_0$  é igual a 25.

Precisamos agora saber qual é então a solução do problema de cobertura na abordagem “O Problema de Partição de Conjunto” com respeito a mesma cidade hipotética do exemplo da Fig. 4A, se fixamos:

Distância de Cobertura = 0,1868h  $\equiv$  0,7km —————→ 0,7km

<sup>8</sup> Isto acontece porque é característica da Média se situar entre o menor e o maior dos valores de uma amostra!

e

“rank-cover” = 20 carteiros (ou distritos) por CDD.

Para cada um dos vértices viáveis, precisamos verificar quais vértices satisfazem a Distância de Cobertura e o “rank-cover” ao mesmo tempo. E para isto, precisamos olhar par o círculo com centro no vértice viável e raio sendo a Distância de Cobertura: observamos quais vértices estão dentro deste círculo e para os que estão no círculo computamos a soma dos seus respectivos pesos (número de distritos). Para os vértices que satisfazem (ou não) a Distância de Cobertura e “rank-cover” é atribuído o valor 1 (ou 0) aos elementos que então formarão a matriz de cobertura.

Verificados a Distância de Cobertura e “rank-cover” para os vértices (CEPs) viáveis  $x_0, x_1, x_2, x_3$ : por exemplo, para um CDD localizado em  $x_1$ , os CEPs  $x_0, x_2, y_0, y_3$  e  $y_4$  satisfazem a Distância de Cobertura mas não satisfazem o “rank-cover” = 20 pois o número total de distritos somados é igual a 25 que é maior que 20.

#### 4.1.5.1 - A Matriz de Cobertura do CEPs

A matriz de cobertura é obtida seguindo o Objetivo de Cobertura onde então os elementos da matriz são 0 ou 1, dependendo se o CEP de centróide  $x_j$  cobre ou não o CEP de centróide  $x_i$ . Para verificar se o Objetivo de Cobertura é satisfeito é preciso efetuar duas tarefas: uma é comparar - e não medir - a distância entre  $x_j$  e  $x_i$  com uma distância “máxima” que é a distância de cobertura previamente estabelecida; a outra tarefa é contar quantos distritos estão dentro da distância (“máxima”) radial em torno de  $x_j$ .



#### **4.1.5.2 - Dois métodos para a resolução do Problema de Cobertura na localização de CDDs da empresa ECT**

Talvez o método de busca em árvore descrito em Christofides (1975, Seção 4.3 ) - descrito novamente, aqui, na Seção 3.2.2.3.1.1 - ; ou o procedimento heurístico para localização de facilidades descrito por Hall [20], o qual segundo o autor é simples podendo ser executado usando apenas compasso e a planta (mapa) da cidade.

OBSERVAÇÃO: Qualquer um dos métodos acima mencionados são suficientes para resolver o problema de cobertura na localização de CDDs da empresa ECT. Mas nenhum destes será implementado.

## CAPÍTULO 5

### Conclusões e Sugestões

#### 5.1 - Sugestões e considerações finais

##### 5.1.1- Sugestões

##### 5.1.1.1 - Sugestões à ECT para o aproveitamento dos resultados

a) Aumentando o número de CDDs, os carteiros ficarão mais perto de suas regiões de entrega. Obviamente, o tempo com o percurso improdutivo diminui sobrando assim mais tempo para o carteiro atender a clientes adicionais em pontos da área - por exemplo, da área rural - que estiverem próximos da sua região de entrega. Em outras palavras, tem-se a margem a um aumento da abrangência do distrito (ou da região de entrega) do carteiro, e com o mesmo número de carteiro ou até mesmo reduzindo o número destes carteiros.

Em resumo, obtém-se a possibilidade de “lapidar” o zoneamento (ou distritamento) existente - não o de propor um novo zoneamento mesmo por que o nosso objetivo nunca foi este.

OBSERVAÇÃO: Sempre que a ECT incluir um novo CEP no sistema, deve colocá-lo ao CDD mais próximo respeitando-se a restrição de capacidade física do CDD vista na Seção 2.5.

##### 5.1.1.2 - Outras sugestões

O programa P-Mediana dentro da abordagem “mini-sum” foi executado não com a totalidade dos dados dos CEPs, isto porque a planta da cidade de Florianópolis-SC não está completa. Mais precisamente, este programa foi executado apenas na parte continental da cidade. Sugerimos então, que a empresa ECT solicite do IPUF

(órgão da prefeitura da cidade) que complete a planta da cidade, aquela desenhada em computador, incluindo o restante da Ilha.

Sempre que a ECT desejar aplicar o programa P-Mediana para outras cidades, deve antes observar que a planta da cidade desenhada em computador pelo SoftWare “MacroStation” deve possuir as seguintes “**Working Units...**”:

**Master Units** = m

**Sub Units** = cm.

A “Resolution” é a seguinte: 100 cm Per m  
100 Pos Units Per cm.

Desta forma tem-se uma “Working Area” de 429496 m<sup>2</sup>. E o mais importante, a matriz de distâncias Euclidianas fica constituída de distâncias verdadeiras (metro, quilômetro e etc... Mais precisamente, neste caso elas ficam em centímetros) e não de distâncias relativas (como um mapa sem escala alguma!). Não obstante esta matriz deve ser dividida por 10000000 no “Procedure Le\_MatrizDE” do Programa P-Mediana, conseguindo então expressar estas distâncias em quilômetro, já que trabalharemos com o sistema MKS onde tempo é medido em horas.

De acordo com os comentários dos resultados da abordagem “Mini-sum” (P-Mediana) aplicada na cidade de Florianópolis/Continente na Seção 4.1.4.4.2, tanto o tempo médio de espera gasto nos pontos de ônibus, bem como a velocidade média de viagem para carteiros se deslocando de ônibus, devem ser dados de entrada do Programa P-Mediana. Este tempo  $\tau$  e a velocidade  $v$  que aparecem na expressão (2) Seção 4.1.3.2.1 devem variar de cidade para cidade e devem ser bem estimados de maneira a refletir as condições de acessibilidade de cada cidade no que diz respeito às viagens usando o transporte coletivo.

## 5.2 - Considerações finais

Qual foi nossa intenção ao apresentar este Estudo de Caso: “Dimensionamento (número) e Localização de Centros de Distribuição da Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT), numa cidade de médio porte” ? Com certeza, não tivemos a pretensão de propor um problema desafiador onde para sua solução somente coubesse modelos e técnicas computacionais sofisticados.

O trabalho ora apresentado deve ter seu valor enquanto teórico. Muito ainda é preciso ser feito no sentido de tornar o “modelo” teórico o mais próximo da realidade, haja visto que quase sempre um modelo teórico é estabelecido diante de simplificações (até grosseiras) dos problemas reais. É preciso pôr exemplo: que, reafirmando, a expressão (2) Seção 4.1.3.2.1 para obter os tempos de viagem seja devidamente calibrada; que de alguma maneira seja incorporado um tratamento para as denominadas barreiras de viagem (ver este conceito em **Larson e Odoni, 1981**) que provocam distorções e discrepâncias no processo (presente na Seção 4.1.3.2.1) de estimar a distância real pela distância Euclidiana ou Retangular usando regressão linear - exemplo de tal barreira de viagem na cidade de Florianópolis são os três morros alinhados mas conhecidos por um nome só como o Morro-da-Cruz”.

Segundo **Novaes (1989, Pag. 15)**, “...*não deve ser esquecido que, embora se incluam dentro dos objetivos da logística a melhoria do nível de serviço em termos globais, tal objetivo não deve ser perseguido de forma a negligenciar os custos. Ao contrário, a redução de custos é um dos objetivos a perseguir, procurando-se sempre*

*a solução técnica que torne mínimo o custo total, respeitados, no entanto, todos os requisitos técnicos e de qualidade impostos ao sistema.”.*

Seguindo a linha de pensamento acima, se o objetivo da Empresa ECT é o de perseguir a redução de custos procurando-se a solução técnica que torne mínimo o custo total, respeitados, no entanto, “todos” os requisitos técnicos e de qualidade impostos ao sistema, então dentro dessa política a solução do problema de localizar suas unidades operacionais, mais precisamente os CDDs, pode ser obtida por adotar a abordagem “O Problema de Partição de Conjunto”. Todavia, com esta abordagem nem todos estes requisitos são satisfeitos: um exemplo é o enorme percurso médio improdutivo dos carteiros se deslocando dos CDDs às suas regiões de entrega.

Por outro lado se a empresa ECT, na atribuição de sua Divisão de Logística (dentro da Gerência de Operações), decidir que deve se preocupar mais em melhorar o nível de serviço, em particular diminuindo o percurso médio improdutivo, então o problema de localizar suas unidades operacionais, mais precisamente os CDDs, resume-se à abordagem “Mini-sum”. Todavia, também aqui, eventualmente um outro requisito de qualidade de serviço pode não ser satisfeito: o percurso (distância ou tempo de viagem) máximo de um carteiro individual se deslocando de seu CDD à sua região de entrega pode exceder a um limite previamente fixado. Não obstante, no que se refere esta abordagem “Mini-sum” em nenhum momento foi negligenciado os custos envolvidos no Sistema de Distribuição como um todo, e prova disso é a breve análise de custos apresentada na Seção 2.3.

Como já foi dito na introdução (Capítulo 1), a empresa ECT dispõe de metodologia própria no dimensionamento (número) e localização de suas unidades. Porém, esta metodologia pode não ser a mais eficiente, já que ainda ocorrem diversos

problemas junto a sua clientela e ainda com custo acima do esperado. Mais precisamente esta empresa é sectária da política de reduzir os custos mas não consegue de certa forma garantir os níveis de padrões de serviços em termos globais. Agora: Primeiro, se a empresa se manter nesta política pode fazê-lo porém de forma mais elaborada pondo em prática efetivamente uma abordagem científica e assim mesmo simples tal como a denominada “O Problema de Partição de Conjunto” - no que diz respeito ao problema de localização de CDDs desta empresa, quaisquer dos dois algoritmos mencionados na Seção 4.1.4.2 são suficientes: são simples de implementar e executar e devem dar soluções boas; segundo, do contrário se a preocupação da empresa ECT for substituída mesmo pelo desejo de ver diminuído até o ótimo o percurso médio improdutivo, então já tem-se a sua disposição o programa P-Medianas (Método de Substituição de Vértices) implementado e junto com o mesmo o aplicativo que faz uso da planta de Florianópolis desenhada em computador pelo IPUF (órgão da prefeitura) para marcar e fazer automaticamente a tomada das distâncias necessárias à solução do problema “Mini-sum”.

## **ANEXO 1**

Teste de regressão linear realizado na Ilha e na parte Continental da cidade de Florianópolis para decidir quais das distâncias DE ou DR melhor aproxima a distância real “d”.

Observação: Usou-se o software “EXCEL 5.0”

dE	d
40	52
24	34
33	51
14	31,5
29	53,5
38	84
36	50
46	52
28	37,5
16	25,5
25	33
20	28,5
14	37
18,5	31,5
12	23
6,5	10
9,5	9,5
25	34
23	27
31	40
32	35
16,5	33,5
23	44,5
33	43
32	43,5
14,5	24
18	29,5
25	34
27,5	35,5
30,5	35,5
16,5	18
29,5	35,5
33	43,5
13	38,5
20,5	28,5
22	22
41,5	54,5
10,5	18
1,424637	0
0,055014	#N/D
0,588409	8,883499
52,89507	37
4174,297	2919,912
#N/D	#N/D
#N/D	#N/D
#N/D	#N/D
#N/D	#N/D

Teste de regressão com as distâncias medidas (observadas) d, DR e DE efetuadas em 38 pares de pontos escolhidos aleatoriamente na parte continental da cidade de Florianópolis-SC mostrou que DE é que melhor aproxima d com erro  $\hat{\epsilon}=0,020473$ ; e o coeficiente  $\hat{a}=1,424637$ .



dE	d
10	10,5
9	10
9	10,5
8,5	14
10	14
15,5	19,5
12	15
12	13,5
18	16,5
13	13,5
14	17
15,5	19,5
16,5	21
19	26,5
20	22,5
22	25
20	28
19	19
22,5	29
21	27
21	27
22,5	33
50	55,5
49	62,5
41	48,5
33,5	35
47	56
49,5	61
51	53
25	34
55	64
44,5	67
33	44
42	61
25	26
99,5	107,5
37	51
17,5	21
29	33
41	52
40	49,5
29	52,5
29	35
48	58
31	34
16	20,5
47	59,5
47	62,5
25	27
77	83
14	16
1,199587	0
0,020473	#N/D
0,943092	5,106406
828,6156	50
21606,47	1303,769
#N/D	#N/D
#N/D	#N/D
#N/D	#N/D

Teste de regressão com as distâncias medidas (observadas) d, DR e DE efetuadas em 51 pares de pontos escolhidos aleatoriamente na parte da Ilha da cidade de Florianópolis-SC mostrou que DE é que melhor aproxima d com erro  $\hat{\epsilon}=0,020473$ ; e o coeficiente  $\hat{a}=1,199587$ .

## **ANEXO-2**

O Programa P-Medianas (Método da Substituição de Vértices) implementado em Linguagem Pascal 6.0 para resolver o Problema de Localização de CDDs da Empresa ECT.

## Program Localiza;

Uses CRT,Printer;

### Const

Nmax = 50;

Infinito = 100E+30;

Mmax = 50;

### Type

Matriz\_real = Array [0..Mmax,0..Nmax] of Real;

vetor1 = Array [0..Nmax] of byte;

vetor2 = Array [0..Nmax] of real;

Matriz\_inteira = Array [0..Mmax,0..Nmax] of byte;

### var

M,N,i,j,p,w,v : Integer;

DistDE,t,tAux,tAux2 : Matriz\_real;

Peso,Codigo\_CEP,SomaPesosDosAlocados,CEPmaisDistante : vetor1;

PesoSomado,PesoAux,PesoSomadoAux,Codigo\_CEP\_Aux : vetor1;

Cod\_CEP : text;

ArqPeso : text;

Saida : text;

tente,desejo,Pare,Continue,Cancele,Tecla,ErreiDadosDosCEPs,Errei : boolean;

r,TempoMedioHora,MinutosTempoMedioAux,CustoHoras : byte;

a\_Chapeu,a,TempoMedio,SomaPesos, MinutosTempoMedio : real;

MinutosTempoMedioAux2 : real;

matrizT : text;

TempoMaxAlocado : vetor2;

ch : char;

texto : String;



```

TextBackground(2);
ClrScr;
Window(x1+2, y1+2, x2-2, y2-2);
TextBackground(5);
ClrScr;
{green White}
textattr:=white + blue*16;
gotoXY(12,5);
write('  DETERMINACAO DO NUMERO E LOCALIZACAO OTIMOS  ');
gotoXY(12,6);
write('DE CDDs(CENTROS DE DISTRIBUICAO DE
CORRESPONDENCIADA)');
gotoXY(12,7);
write('DA EMPRESA EMPRESA BRASILEIRA DE CORREIOS E
TELEGRAFOS');
gotoXY(12,9);
write('Uma Aplicacao na cidade de: ');
read(texto);
gotoXY(40,9);
write(texto);
readln;
textattr:= white + green*16;
gotoXY(15,14);
write('Resolucao do Problema "Minisum" (p-Medianas)');
gotoXY(20,16);
write('Metodo da substituicao de vertices');
textattr:= white + LightGray;
gotoXY(40,20);
write('Tecle ');
textattr:= LightGreen;
write('ENTER');
textattr:= white + LightGray ;

```

```

write(' para continuar...');
eadln;
end;

```

## **Procedure Apresentacao2;**

```

Var

```

```

texto      : String;

```

```

begin

```

```

writeln(Lst,'          DETERMINACAO DO NUMERO E LOCALIZACAO
OTIMOS  ');

```

```

writeln(Lst,'    DE CDDs(CENTROS DE DISTRIBUICAO DE
CORRESPONDENCIADA)');

```

```

writeln(Lst,'    DA EMPRESA EMPRESA BRASILEIRA DE CORREIOS E
TELEGRAFOS');

```

```

writeln(Lst,'    Uma Aplicacao na cidade de: ');

```

```

write(Lst,texto);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst,'          Resolucao do Problema "Minisum" (p-Medianas)');

```

```

    writeln(Lst,'          Metodo da substituicao de vertices');

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Lst);

```

```

writeln(Lst);
write(Lst,'          Tecle "ENTER" para continuar...');
gotoXY(69,20);
readln;
end;

```

### **Procedure Pause(texto:string);**

```

var
  ch1,ch2   :char;
  lin,col   :byte;
begin
  col:=wherex;
  lin:=wherey;
  gotoxy (35,25);
  textattr:=white + red*16 + blink;
  write(texto);
  for w:= 1 to 3 do begin
    for v:=40 to 2000 do
      sound(v);
    Delay(1);
    for v:=2000 downto 4 do {som!!!!!!}
      sound(v);
    end;
    nosound;
  ch1:=readkey;
  if (ch1=#0) then
    ch2:=readkey
  else
    ch2:=#0;
  write(#13); {#13 = Enter}
  textattr:=lightgray;
  clreol;

```

```

    gotoxy (col,lin);
    textattr:=white
end;

```

### **Procedure Ler\_MatrizDE;**

Var

```

    buffer      :text;

```

begin

```

    assign(buffer,'c:\M_Cont.dpp');
    reset(buffer);
    readln(buffer,M);
    readln(buffer,N);
    N:=N-M;
    for i:=0 to M-1 do begin
        for j:=0 to (M+N-1) do begin
            readln(buffer,DistDE[i,j]);
            DistDE[i,j] := DistDE[i,j]/100000000;
        end;
    end;
    close(buffer);
end;

```

### **Procedure Apresentar1;**

Var

```

    i,j      : Byte;

```

BEGIN

```

    if (wherey=22) then
        clrscr;
    textattr:=white + red + blink;
    gotoXY(32,1);

```



```

write('ATENCAO!!!');
textattr:= lightblue;
gotoXY(9,2);
writeln('Verifique agora se os dados sobre os CEPs estao corretos!');
writeln;
writeln;
textattr:= white;
Writeln ('CEPs(VERTICES)      Numero de ditritos(PESO) do CEP      Codigo do
CEP');
i := 0;
while i <> M do
begin
Writeln ('      x',i,'              ',Peso[i],'              ',Codigo_CEP[i]);
Pause('Parei!... Pressione "ENTER" para Continuar');
i := i+1;
end;
writeln;
if (wherey=22) then
clrscr;
i := 0;
while i <> N do
begin
Writeln ('      y',i,'              ',Peso[i+M],'
',Codigo_CEP[i+M]);
Pause('Parei!... Pressione "ENTER" para Continuar');
i := i+1;
end;
Writeln;
writeln;
textattr:= Cyan;
Writeln(' OBSERVACAO:');
Writeln(' Na planta da cidade,"x" representa o CEP viavel(cadidato a localizacao ');

```

```

Write(' de CDDs marcado em ');
textattr:= lightred;
write('vermelho');
textattr:= Cyan;
write(' de 0 ate ',M-1,', e "y" representa o CEP nao viavel ');
write(' marcado em');
textattr:= lightblue;
Write(' azul');
textattr:= Cyan;
write(' de 0 ate ',N-1,',');
readln;
end;

```

## Procedure Apresentar2;

Var

i,j : Byte;

BEGIN

```

writeln(Lst);
writeln(Saida);
writeln(Lst);
writeln(saida);
writeln(Lst);
writeln(Saida);
writeln(Lst);
writeln(Saida);
Writeln (Lst,'CEPs(VERTICES)      Numero de ditritos(PESO) do CEP     Codigo
do CEP');
Writeln (Saida,'CEPs(VERTICES)      Numero de ditritos(PESO) do CEP
Codigo do CEP');
i := 0;

```

```

while i<> M do
begin
  Writeln (Lst,'  x',i,'           ',Peso[i],'           ',Codigo_CEP[i]);
  Writeln (Saida,'  x',i,'           ',Peso[i],'
',Codigo_CEP[i]);
  i := i+1;
end;

writeln(Lst);
writeln(Saida);
writeln(Lst);
writeln(Saida);
i := 0;
while i<>N do
begin
  Writeln (Lst,'  y',i,'           ',Peso[i+M],'
',Codigo_CEP[i+M]);
  Writeln (Saida,'  y',i,'           ',Peso[i+M],'
',Codigo_CEP[i+M]);
  i := i+1;
end;
Writeln(Lst);
writeln(Saida);
writeln(Lst);
writeln(Saida);
Writeln(Lst,' OBSERVACAO:');
Writeln(Saida,' OBSERVACAO:');
Writeln(Lst,'      Na planta da cidade,"x" representa o CEP ');
Writeln(Saida,'      Na planta da cidade,"x" representa o CEP ');
writeln(Lst,'      viavel(cadidato a localizacaode CDDs marcado');
writeln(Saida,'      viavel(cadidato a localizacaode CDDs marcado');
writeln(Lst,'      em vermelho de 0 ate ',M-1,', e "y" representa');

```



```

writeln;
j := 12*W;
While (j < M) and (j < 12*(W+1) ) do Begin
    gotoxy(6+6*(j mod 12),3);
    write('x',j,' ');
    j := j+1;
End;
writeln;
For i := 0 to M-1 do begin
    write('x',i,' ');
    j:=12*W;
    While (j < M) and (j < 12*(W+1)) do begin
        Write (' ',DistDE[i,j]:5:2);
        j:=j+1;
    end;
    writeln;
    Pause('Parei!... Pressione qualquer tecla para Continuar');
    {readln;}
end;
Readln;
W:=W+1;
end;
{ N,,o Via veis }
WW:=(N div 12);
W:=0;
While (W<=WW) do begin
    ClrScr;
    textattr:= white;
    {writeln;}
    j := 12*W;
    While (j < N) and (j < 12*(W+1) ) do Begin
        gotoxy(6+6*(j mod 12),3);

```

```

    write('y',j,' ');
    j := j+1;
End;
writeln;
For i := 0 to M-1 do begin
    write('x',i,' ');
    j:=12*W;
    While (j < N) and (j < 12*(W+1)) do begin
        Write (' ',DistDE[i,j+M]:5:2);
        j:=j+1
    end;
    writeln;
    Pause('Parei!... Pressione qualquer tecla para Continuar');
    {writeln}
end;
Readln;
W:=W+1;
end;
end;

```

Procedure Apresentar\_2\_MatrizDistancia;

Var

i,j,s,W,WW : Byte;

begin

if (wherey=22) then

clrscr;

{ Vi veis }

WW:=(M div 12);

W:=0;

While (W<=WW) do begin

```

ClrScr;
textattr:= white;
Writeln (Lst,'MATRIZ DE DISTANCIA EUCLIDIANA (EM KM)');
Writeln (Saida,'MATRIZ DE DISTANCIA EUCLIDIANA (EM KM)');
writeln(Lst);
writeln(Saida);
j:=12*W;
While (j < M) and (j < 12*(W+1) ) do Begin
    gotoxy(6+6*(j mod 12),3);
    write(Lst,'x',j,' ');
    write(Saida,'x',j,' ');
    j:=j+1;
End;
writeln(Lst);
writeln(Saida);
For i:= 0 to M-1 do begin
    write(Lst,'x',i,' ');
    write(Saida,'x',i,' ');
    j:=12*W;
    While (j < M) and (j < 12*(W+1)) do begin
        Write (Lst,' ',DistDE[i,j]:5:2);
        Write (Saida,' ',DistDE[i,j]:5:2);
        j:=j+1;
    end;
    writeln(Lst);
    writeln(Saida);
    {readln;}
end;
Readln;
W:=W+1;
end;
writeln(Saida);

```

```

writeln(Saida);
writeln(Saida);
writeln(Saida);
writeln(Saida);
{ N,,o Vi veis }
WW:=(N div 12);
W:=0;
While (W<=WW) do begin
  ClrScr;
  textattr:= white;
  {writeln;}
  j:=12*W;
  While (j < N) and (j < 12*(W+1) ) do Begin
    gotoxy(6+6*(j mod 12),3);
    write(Lst,'y',j,' ');
    write(Lst,'y',j,' ');
    j:=j+1;
  End;
  writeln(Lst);
  writeln(Saida);
  For i := 0 to M-1 do begin
    write(Lst,'x',i,' ');
    write(Saida,'x',i,' ');
    j:=12*W;
    While (j < N) and (j < 12*(W+1)) do begin
      Write (Lst,' ',DistDE[i,j+M]:5:2);
      Write (Saida,' ',DistDE[i,j+M]:5:2);
      j:=j+1
    end;
    writeln(Lst);
    writeln(Saida);
  {writeln}

```



```
end;  
Readln;  
W:=W+1;  
end;  
writeln(Lst);  
writeln(Saida);  
Writeln(Lst);  
writeln(Saida);  
writeln(Lst);  
writeln(Saida);  
writeln(Lst);  
writeln(Saida);  
Writeln(Lst);  
end;
```

### **Procedure Ler\_p;**

```
Begin  
clrScr;  
gotoxy(5,3);  
write('entre com numero "p" de CDDs requeridos => ');  
readln(p);  
write(Lst,'entre com numero "p" de CDDs requeridos => ',p);  
writeln(Lst);  
writeln(Lst);  
end;
```

**Procedure Mediana;**

Var

EstaEmS : Array [0..Nmax] of Boolean;  
 S,MedAss : Array [0..Nmax] of Integer;  
 FoiTestado : Array [0..Nmax] of Boolean;  
 Sigma : Real;

**Procedure GeraSolucaoInicial;**

Var

i : Byte;

begin

For i := 0 to p-1 do S[i] := i;

end;

**Procedure ApresentaMediana;**

var

k,TotalDeDistritos :byte;

TempoMaxAlocadoHora,MinutosTempoMaxAlocadoAux : vetor1;

MinutosTempoMaxAlocado,MinutosTempoMaxAlocadoAux2 : vetor2;

Begin

begin

Writeln;

TotalDeDistritos :=0;

for k:=0 to M+N-1 do

begin

TotalDeDistritos := TotalDeDistritos + Peso[k];

end;

{writeln;}

```

writeln('Numero total de CEPs no sistema      =>' ,M+N);
writeln('Numero Total de Distritos no sistema  =>' ,TotalDeDistritos);
Writeln('Soma dos tempos(ida e volta) improdutivos =>' ,Sigma:4:2,' horas.');
```

Writeln ('Observacao:');

```

Writeln ('      Esta soma implica em um "custo" equivalente a ',CustoHoras,'
CARTEIROS no sistema.');
```

```

Writeln ('Tempo Medio de Viagem(ida e volta)    =>' ,TempoMedioHora,'h e
',MinutosTempoMedioAux, 'min.');
```

Writeln ('OBS: "x" CEP viavel (candidato a localizacao do CDD) e "y" CEP nao viavel.');

```

Writeln (p,'-CDD  CEPs ALOCADOS');
```

```

writeln(Lst,'Numero total de CEPs no sistema      =>' ,M+N);
writeln(Lst,'Numero Total de Distritos no sistema  =>' ,TotalDeDistritos);
Writeln(Lst,'Soma dos tempos(ida e volta) improdutivos =>' ,Sigma:4:2,' horas.');
```

Writeln (Lst,'Observacao:');

```

Writeln (Lst,'      Esta soma implica em um "custo" equivalente a ',CustoHoras,'
CARTEIROS no sistema.');
```

```

Writeln (Lst,'Tempo Medio de Viagem(ida e volta)    =>' ,TempoMedioHora,'h e
',MinutosTempoMedioAux, 'min.');
```

Writeln (Lst,'OBS: "x" CEP viavel (candidato a localizacao do CDD) e "y" CEP nao viavel.');

```

Writeln (Lst,p,'-CDD  CEPs ALOCADOS');
```

```

writeln(Saida,' ');
writeln(Saida,' ');
```

```

writeln(Saida,'Numero total de CEPs no sistema      =>' ,M+N);
writeln(Saida,'Numero Total de Distritos no sistema  =>' ,TotalDeDistritos);
Writeln(Saida,'Soma dos tempos(ida e volta) improdutivos =>' ,Sigma:4:2,' horas.');
```

Writeln (Saida,'Observacao:');

```

Writeln (Saida,'      Esta soma implica em um "custo" equivalente a ',CustoHoras,'
CARTEIROS no sistema.');
```

```

Writeln (Saida,'Tempo Medio de Viagem(ida e volta)    =>' ,TempoMedioHora,'h e
',MinutosTempoMedioAux, 'min.');
```

```
Writeln (Saida,'OBS: "x" CEP viavel (candidato a localizacao do CDD) e "y" CEP nao
viavel.');
```

```
Writeln (Saida,p,'-CDD CEPs ALOCADOS');
```

```
end;
```

```
i := 0;
```

```
while i <> p do
```

```
Begin
```

```
begin
```

```
for k:=0 to p-1 do
```

```
PesoSomado[k] := 0;
```

```
end;
```

```
Write ('x',S[i],' ');
```

```
Write (Lst,'x',S[i],' ');
```

```
write (Saida,'x',S[i],' ');
```

```
j := 0;
```

```
while j <> M+N do
```

```
begin
```

```
  If S[i] = MedAss[j] then
```

```
  BEGIN
```

```
    if j < M then
```

```
    begin
```

```
      Write ('x',j,' ');
```

```
      Write (Lst,'x',j,' ');
```

```
      Write (Saida,'x',j,' ');
```

```
      SomaPesosDosAlocados [S[i]] := PesoSomado[i] + Peso[j];
```

```
      PesoSomado[i] := SomaPesosDosAlocados [S[i]] ;
```

```
      PesoSomadoAux[i] := PesoSomado[i];
```

```
    end
```

```
  else
```

```
  begin
```

```

    j := j-M;
    Write ('y',j,' ');
    Write (Lst,'y',j,' ');
    Write (Saida,'y',j,' ');
    j := j+M;
    SomaPesosDosAlocados [S[i]] := PesoSomado[i] + Peso[j];
    PesoSomado[i] := SomaPesosDosAlocados [S[i]] ;
    PesoSomadoAux[i] := PesoSomado[i];
  end;
end;
j := j+1;
end;
i := i+1;
writeln;
writeln(Lst);
writeln(Saida);
end;
i := 0;
while i <> p do

```

Begin

```

  TempoMaxAlocado [S[i]] := 0;

```

```

  j := 0;

```

```

  while j <> M+N do

```

```

    Begin

```

```

      begin

```

```

        If S[i] = MedAss[j] then

```

```

          tAux[S[i],j] := t[S[i],j];

```

```

        end;

```

```

      If S[i] = MedAss[j] then

```

```

        Begin

```

```

    if (tAux[S[i],j] > TempoMaxAlocado [S[i]]) or (tAux[S[i],j] =
TempoMaxAlocado [S[i]]) then

```

```

        begin
            TempoMaxAlocado [S[i]] := tAux[S[i],j];
            CEPmaisDistante [S[i]] := j;
        end
    else
        tAux[S[i],j] := TempoMaxAlocado [S[i]];

```

```

    End;

```

```

    j := j+1;

```

```

    end;

```

```

    i := i+1;

```

```

    writeln;

```

```

    writeln(Lst);

```

```

    writeln(Saida);

```

```

    end;

```

```

    {writeln;}

```

```

    for i:=0 to p-1 do

```

```

        begin

```

```

            writeln('Numero de distritos alocados a x',S[i],'=>' ,PesoSomadoAux[i]);

```

```

            writeln(Lst,'Numero de distritos alocados a x',S[i],'=>' ,PesoSomadoAux[i]);

```

```

            writeln(Saida,'Numero de distritos alocados a x',S[i],'=>' ,PesoSomadoAux[i]);

```

```

        begin

```

```

            if CEPmaisDistante [S[i]] < M then

```

```

                begin

```

```

                    writeln('CEP alocado mais distante de x',S[i],' => x',CEPmaisDistante [S[i]]);

```

```

                    writeln(Lst,'CEP alocado mais distante de x',S[i],' => x',CEPmaisDistante [S[i]]);

```

```

                    writeln(Saida,'CEP alocado mais distante de x',S[i],' => x',CEPmaisDistante

```

```

[S[i]]);

```

```

                end

```

```

            else

```

```

writeln('CEP alocado mais distante de x',S[i],' => y',CEPmaisDistante [S[i]] -
M);
writeln(Lst,'CEP alocado mais distante de x',S[i],' => y',CEPmaisDistante [S[i]] -
M);
writeln(Saida,'CEP alocado mais distante de x',S[i],' => y',CEPmaisDistante
[S[i]] - M);
end;

begin
TempoMaxAlocadoHora [S[i]] := Trunc(TempoMaxAlocado [S[i]]);
MinutosTempoMaxAlocado [S[i]]:= (TempoMaxAlocado [S[i]]-
(TempoMaxAlocadoHora [S[i]]))*100;
MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]]:= Trunc(MinutosTempoMaxAlocado
[S[i]]);
MinutosTempoMaxAlocado [S[i]]:= MinutosTempoMaxAlocadoAux
[S[i]]*60/100;
MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]]:= Trunc(MinutosTempoMaxAlocado
[S[i]]);
if ((MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]] > 60) or
(MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]] = 60)) then
begin
MinutosTempoMaxAlocadoAux2 [S[i]]:= MinutosTempoMaxAlocadoAux
[S[i]]/60;
TempoMaxAlocadoHora [S[i]]:= TempoMaxAlocadoHora [S[i]] +
Trunc(MinutosTempoMaxAlocadoAux2 [S[i]]);
MinutosTempoMaxAlocado [S[i]]:= (MinutosTempoMaxAlocadoAux2 [S[i]] -
Trunc(MinutosTempoMaxAlocadoAux2 [S[i]]))*100;
MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]]:= Trunc( MinutosTempoMaxAlocado
[S[i]]*60);
MinutosTempoMaxAlocado[S[i]] :=
MinutosTempoMaxAlocadoAux[S[i]]*60/100;
MinutosTempoMaxAlocadoAux[S[i]] :=
Trunc(MinutosTempoMaxAlocado[S[i]]);

```

```

    end
  end;
writeln('Tempo (ou distancia) maximo =' ,TempoMaxAlocadoHora [S[i]],'h e
',MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]], 'min. ');
writeln(Lst,'Tempo (ou distancia) maximo =' ,TempoMaxAlocadoHora [S[i]],'h e
',MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]], 'min. ');
writeln(Saida,'Tempo (ou distancia) maximo =' ,TempoMaxAlocadoHora [S[i]],'h e
',MinutosTempoMaxAlocadoAux [S[i]], 'min. ');
writeln;
writeln(Lst);
writeln(Saida);
  end;
Readln;
End;

```

### **Procedure AssociaMediana;**

Var

```

  DistMin : Real;
begin
  For j := 0 to M-1 do EstaEmS [j] := False;
  For i := 0 to p-1 do EstaEmS [S[i]] := True;
  For j := 0 to M+N-1 do
    begin
      DistMin := Infinito;
      For i := 0 to p-1 do If t [S[i],j] < DistMin
      then begin
        MedAss [j] := S[i];
        DistMin := t [S[i],j];
      end;
    end;
  end;
  Sigma := 0;

```



```

SomaPesos := 0;
For j := 0 to M+N-1 do
begin
  Sigma := Sigma + Peso [j] * t [MedAss[j],j];
  SomaPesos := SomaPesos + Peso[j];
end;
CustoHoras := Trunc(Sigma/8);
TempoMedio := Sigma/SomaPesos;
TempoMedioHora := Trunc(TempoMedio);
MinutosTempoMedio := (TempoMedio-(TempoMedioHora))*100;
MinutosTempoMedioAux := Trunc(MinutosTempoMedio);
MinutosTempoMedio := MinutosTempoMedio*60/100;
MinutosTempoMedioAux := Trunc(MinutosTempoMedio);
  if ((MinutosTempoMedioAux > 60) or (MinutosTempoMedioAux = 60)) then
  begin
    MinutosTempoMedioAux2 := MinutosTempoMedioAux/100;
    TempoMedioHora := TempoMedioHora + Trunc(MinutosTempoMedioAux2);
    MinutosTempoMedio := (MinutosTempoMedioAux2 -
Trunc(MinutosTempoMedioAux2))*100;
    MinutosTempoMedioAux := Trunc(MinutosTempoMedio);
    MinutosTempoMedio := MinutosTempoMedioAux*60/100;
    MinutosTempoMedioAux := Trunc(MinutosTempoMedio);
  end
end;

```

### **Procedure NenhumFoiTestado;**

```

begin
  For j := 0 to M-1 do FoiTestado [j] := False;
end;

```

**Function Selecciona : Byte;**

Var

Vert : integer;

begin

Vert := 0;

For j := M downto 1 do

If not FoiTestado [j] and not EstaEmS [j] then Vert := j;

Selecciona := Vert;

If Vert  $\neq$  0 then FoiTestado [Vert] := True;

end;

**Function CalculaDelta (ISai,jEntra : Byte) : Real;**

Var

DistMin,NovoSigma : Real;

Med : Byte;

begin

NovoSigma := 0;

For j := 0 to M+N-1 do

begin

Med := jEntra;

DistMin := t [jEntra,j];

For i := 0 to p-1 do

If i  $\neq$  ISai

then If t [S[i],j] &lt; DistMin then DistMin := t [S[i],j];

NovoSigma := NovoSigma + Peso [j] \* DistMin;

end;

CalculaDelta := Sigma - NovoSigma;

end;

**Procedure TrocaVertice (i,j : Byte);**

begin

S[i] := j;

end;

Var

HouveTroca : Boolean;

Imax,i,jUn : byte;

Delta,DeltaMax : Real;

begin

GeraSolucaoInicial;

AssociaMediana;

ApresentaMediana;

Repeat

HouveTroca := False;

NenhumFoiTestado;

Repeat

jUn := Selecciona;

If jUn &gt; 0 then

begin

DeltaMax := -Infinito;

For i := 0 to p-1 do

begin

Delta := CalculaDelta (i,jUn);

If Delta &gt; DeltaMax then begin

Imax := i;

DeltaMax := Delta;

end;

end;

If DeltaMax &gt; 0 then begin

TrocaVertice (Imax,jUn);

HouveTroca := True;

```

        AssociaMediana;
        ApresentaMediana;
    end;

    end;

    Until jUn = 0;
Until Not HouveTroca;
Writeln ('SOLUCAO OTIMA');
Writeln (Lst,'SOLUCAO OTIMA');
Writeln (Saida,'SOLUCAO OTIMA');
Readln;
ClrScr;
end;

```

### **Procedure LeCodigoDosCEPs;**

```

BEGIN
begin
    begin
        ClrScr;
        gotoXY(5,3);
        write('Entre com os codigos dos CEPs viaveis: ');
    end;
    for j:=0 to M-1 do
        begin
            gotoXY(5,4+j);
            write('Codigo de x['j,'] = ');
            readln(Codigo_CEP[j]);
        end;
    begin
        ClrScr;
        gotoXY(5,3);
        write('Entre com os codigos dos CEPs nao viaveis: ');
    end;
end;

```

```

end;
for j:=0 to N-1 do
begin
    gotoXY(5,4+j);
    write('Codigo de y['j,'] = ');
    readln(Codigo_CEP_Aux[j]);
    Codigo_CEP[j+M] := Codigo_CEP_Aux[j];
end;
end;
begin
Assign(Cod_CEP,'Cod_CEP.TXT');
rewrite(Cod_CEP);
for j:=0 to M+N-1 do
writeln(Cod_CEP,Codigo_CEP[j]);
Close(Cod_CEP);
end;
end;

```

### **Procedure LePesosDosCEPs;**

```

BEGIN
begin
begin
    ClrScr;
    gotoXY(5,3);
    write('Entre com os pesos dos CEPs viaveis: ');
end;
for j:=0 to M-1 do
begin
    gotoXY(5,4+j);
    write('Peso de x['j,'] = ');

```

```

    read(Peso[j]);
end;

begin
  ClrScr;
  gotoXY(5,3);
  write('Entre com os pesos dos CEPs nao viaveis: ');
end;
for j:=0 to N-1 do
  begin
    gotoXY(5,4+j);
    write('Peso de y['',j,''] = ');
    readln(PesoAux[j]);
    Peso[j+M] := PesoAux[j];
  end;
end;
begin
  Assign(ArqPeso,'ArqPeso.TXT');
  rewrite(ArqPeso);
  for j:=0 to M+N-1 do
    writeln(ArqPeso,Peso[j]);
  Close(ArqPeso);
end;
end;

```

### **Procedure TenteDeNovo;**

```
var
```

```
ch : char;
```

```
begin
```

```

gotoxy(1,24);
write('Digite a tecla "ENTER" para tentar novamente com o valor certo de "p":');
ch := readkey;
if ch = #13 then
    tente := true;
end;

```

### **Procedure DesejaRepetir;**

```

var

ch : char;
begin
    gotoxy(1,24);
    write('Digite a tecla "ENTER" para repetir com outro valor de "p":');
    ch := readkey;
    if ch = #13 then
        desejo := true;
    end;
end;

```

### **Procedure som;**

```

var
    j      :byte;
    i      :word;
begin
    for j:= 1 to 3 do begin
        for i:=40 to 2000 do
            sound(i);
            Delay(i);
            for i:=2000 downto 4 do
                sound(i);
            end;
        end;
    end;
end;

```

```

end;
nosound;
end;

```

### **Procedure CriaMatrizT; { Cria a matriz dos tempos}**

```

var
  opcao : byte;
begin
  clrscr;
  ClrScr;
  gotoXY(3,2);
  write('Entre com o coeficiente de regressao "a_Chapeu" ou "a":');
  gotoXY(3,3);
  write('"a_Chapeu" para o caso em que a distancia real foi melhor');
  gotoXY(3,4);
  write('aproximada pela distancia euclidiana DE; e "a" para o caso em que');
  gotoXY(3,5);
  write('a distancia real foi melhor aproximada pela distancia retangular DR:');
  gotoXY(10,8);
  write('Escolha a opcao:');
  gotoXY(10,10);
  write('<1> se o coeficiente for "a_Chapeu"');
  gotoXY(10,11);
  write('<2> se o coeficiente for "a"');
  gotoXY(10,13);
  write('Digite a opcao...');
  readln(opcao);
  case opcao of
    1 : begin
      gotoXY(15,16);
      write('Entre com o valor de "a_Chapeu" : ');
      readln(a_Chapeu);
    end;
  end;
end;

```



```

Ler_MatrizDE;
  for i:=0 to M-1 do
    for j:=0 to M+N-1 do
      if distDE[i,j] <= 0.5 then
        begin
          t[i,j] := (a_Chapeu*distDE[i,j]/4)*2;
        end
      else
        t[i,j] := (a_Chapeu*distDE[i,j]/40 + 0.25)*2;
      assign(MatrizT,'MatrizT.TXT');
      rewrite(MatrizT);
      writeln(MatrizT,t[i,j]);
      close(MatrizT);
    end;
  end;

```

```

2  :begin
    gotoXY(15,16);
    write('Entre com o valor de "a" : ');
    readln(a);
    Ler_MatrizDE;
      for i:=0 to M-1 do
        for j:=0 to (M+N-1) do
          if distDE[i,j] <= 0.5 then
            begin
              t[i,j] := (1.2732*a*distDE[i,j]/4)*2;
            end
          else
            t[i,j] := (1.2732*a*distDE[i,j]/40 + 0.25)*2;
          assign(MatrizT,'MatrizT.TXT');
          rewrite(MatrizT);
          writeln(MatrizT,t[i,j]);
          close(MatrizT);
        end;
      end;

```



```

ELSE
begin
Tecla := false;
gotoXY(38,16);write(' ');
textattr:=white + red*16 + blink;
end;
begin
  for j:= 1 to 2 do begin
    for i:=40 to 200 do
      sound(i);
      Delay(i);
    for i:=200 downto 4 do
      sound(i);
    end;
    nosound;
  end;
GotoXY(20,17);
write('A tecla deve ser "C" ou "P". Digite a tecla!');
textattr:=white;
end;
until Tecla = True;
end;

```

### **Procedure TentaDeNovo2;**

```

begin
ClrScr;
Tecla := false;
repeat
textattr:=white;
gotoXY(10,10);
write('Tecla "C" para Cancelar e/ou Corrigir!');
gotoXY(10,12);

```

```

write("Tecla "P" para Confirmar e Prosseguir!");
gotoXY(20,16);
write('Digite a tecla => ');
read(ch);
Case ch of

```

```

    'C', 'c' :
        begin
            Errei := true;
            Tecla := true;
        end;

```

```

    'P', 'p' :
        begin
            Errei := false;
            Tecla := true;
        end;

```

```

ELSE
begin
    Tecla := false;
    gotoXY(38,16);write(' ');
    textattr:=white + red*16 + blink;
end;
begin
    for j:= 1 to 2 do begin
        for i:=40 to 200 do
            sound(i);
        Delay(i);
        for i:=200 downto 4 do
            sound(i);
        end;
        nosound;
    end;
end;

```

```

gotoXY(20,17);
write('A tecla deve ser "C" ou "P". Digite a tecla!');
textattr:=white;
end;
until Tecla = True;
end;

```

\*\*\*\*\*Programa

**Principal\*\*\*\*\***

```

begin
  Assign(Saida,'Cont.txt');
  rewrite(Saida);
  ClrScr;
  textattr:= white + green*16;
  Apresentacao;
  Apresentacao2;
  Ler_MatrizDE;
  textattr:= white;
  ErreiDadosDosCEPs := true;
  repeat
    LeCodigoDosCEPs;
    LePesosDosCEPs;
    ClrScr;
    Apresentar1;
    VerificaDadosCEPs;
    Until Not ErreiDadosDosCEPs;
    Apresentar2;
    textattr:= white;
    ApresentarMatrizDistancia;
    Apresentar_2_MatrizDistancia;
    Errei := true;

```

```

repeat
  CriaMatrizT;
  TentaDeNovo2;
  Until Not Errei;
repeat
  desejo := false;
repeat
  tente := false;
  Ler_p;
  if p<= M then begin
    Mediana;
  end
  else
    begin
      gotoxy(20,10);
      textattr:=white + red*16 + blink;
      write('ATENCAO!!!');
      textattr:=lightgray;
      som;
      gotoxy(20,12);
      write('Voce digitou um valor de "p" nao permitido!');
      gotoxy(20,18);
      writeln('O valor de "p" deve ser menor ou igual');
      gotoxy(20,20);
      writeln('ao numero "M"=',M,' de CEPs viaveis!');
      TenteDeNovo;
    end;
  Until Not tente ;
  DesejaRepetir;
  Until Not desejo;
  Close(Saida);
end.

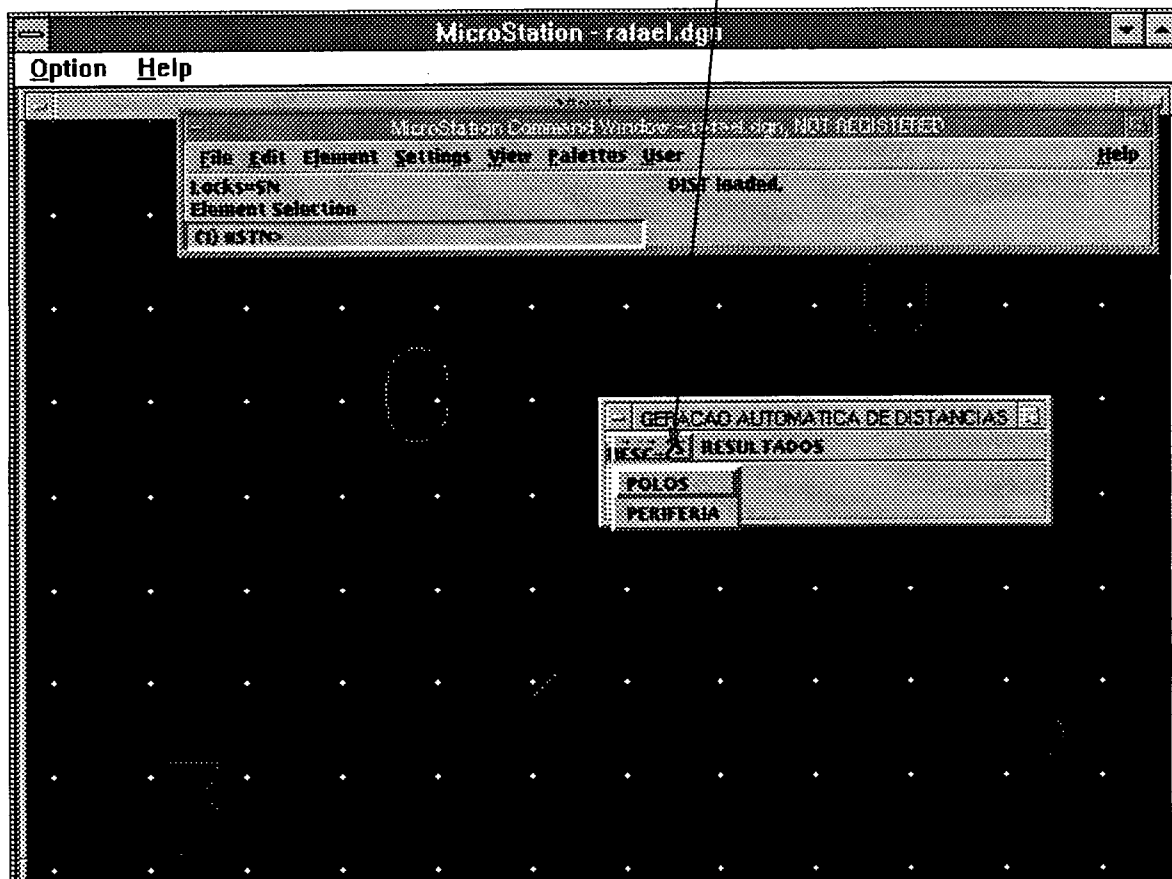
```

### **ANEXO-3**

Tela mostrando o ambiente do Aplicativo implementado através do SoftWare “MacroStation” para gerar a Matriz de Distâncias Euclidianas entre os CEPs

**Primeira tela:** Tem-se dois botões para marcar os pontos!

Clicando, abre os dois botões:  
**POLOS** para marcar em  
vermelho os pontos viáveis; e  
**PERIFERIA** para marcar em  
azul os pontos não viáveis.





#### ANEXO-4

Relatório com as soluções para  $P = 1$  ( $P$  é o número de CDDs requeridos) obtidas ao executar o programa P-Medianas (Método da Substituição de Vértices), quando da abordagem “Mini-sum” aplicada na cidade de Florianópolis/Continente: Primeiro é mostrado os resultados e em seguida a parte da cidade que corresponde ao continente com a localização atual do único CDD existente e os dois lugares  $x_1$  (a solução ótima) e  $x_0$  (a segunda melhor solução) obtidos da abordagem para a localização do CDD.

CEPs(VERTICES)	Numero de distritos(PESO) do CEP	Codigo do CEP
x0	3	75
x1	4	70
x2	3	95
x3	3	90
y0	3	80
y1	3	85

**OBSERVACAO:**

Na planta da cidade, "x" representa o CEP viavel (cadidato a localizacao de CDDs marcado em vermelho de 0 ate 3; e "y" representa o CEP nao viavel marcado em azul de 0 ate 1.

**MATRIZ DE DISTANCIA EUCLIDIANA (EM KM)**

	x0	x1	x2	x3
x0	0.00	1.38	2.13	2.33
x1	1.38	0.00	2.73	1.57
x2	2.13	2.73	0.00	2.20
x3	2.33	1.57	2.20	0.00

	y0	y1
x0	3.29	3.64
x1	2.14	2.26
x2	4.85	4.59
x3	3.20	2.52

Numero total de CEPs no sistema  $\Rightarrow 6$   
 Numero Total de Distritos no sistema  $\Rightarrow 19$   
 Soma dos tempos(ida e volta) improdutivos  $\Rightarrow 10.82$  horas.

Observacao:

Esta soma implica em um "custo" equivalente a 1 CARTEIROS no sistema.

Tempo Medio de Viagem (ida e volta)  $\Rightarrow 0h$  e 34min.

OBS: "x" CEP viavel (candidato a localizacao do CDD) e "y" CEP nao viavel.

1-CDD CEPs ALOCADOS

x0 x0 x1 x2 x3 y0 y1

Numero de distritos alocados a x0  $\Rightarrow 19$

CEP alocado mais distante de x0  $\Rightarrow y1$

Tempo (ou distancia) maximo = 0h e 45min.

Numero total de CEPs no sistema  $\Rightarrow 6$   
 Numero Total de Distritos no sistema  $\Rightarrow 19$   
 Soma dos tempos(ida e volta) improdutivos  $\Rightarrow 9.65$  horas.

Observacao:

Esta soma implica em um "custo" equivalente a 1 CARTEIROS no sistema.

Tempo Medio de Viagem(ida e volta)  $\Rightarrow 0h$  e 30min.

OBS: "x" CEP viavel (candidato a localizacao do CDD) e "y" CEP nao viavel.

1-CDD CEPs ALOCADOS

x1 x0 x1 x2 x3 y0 y1

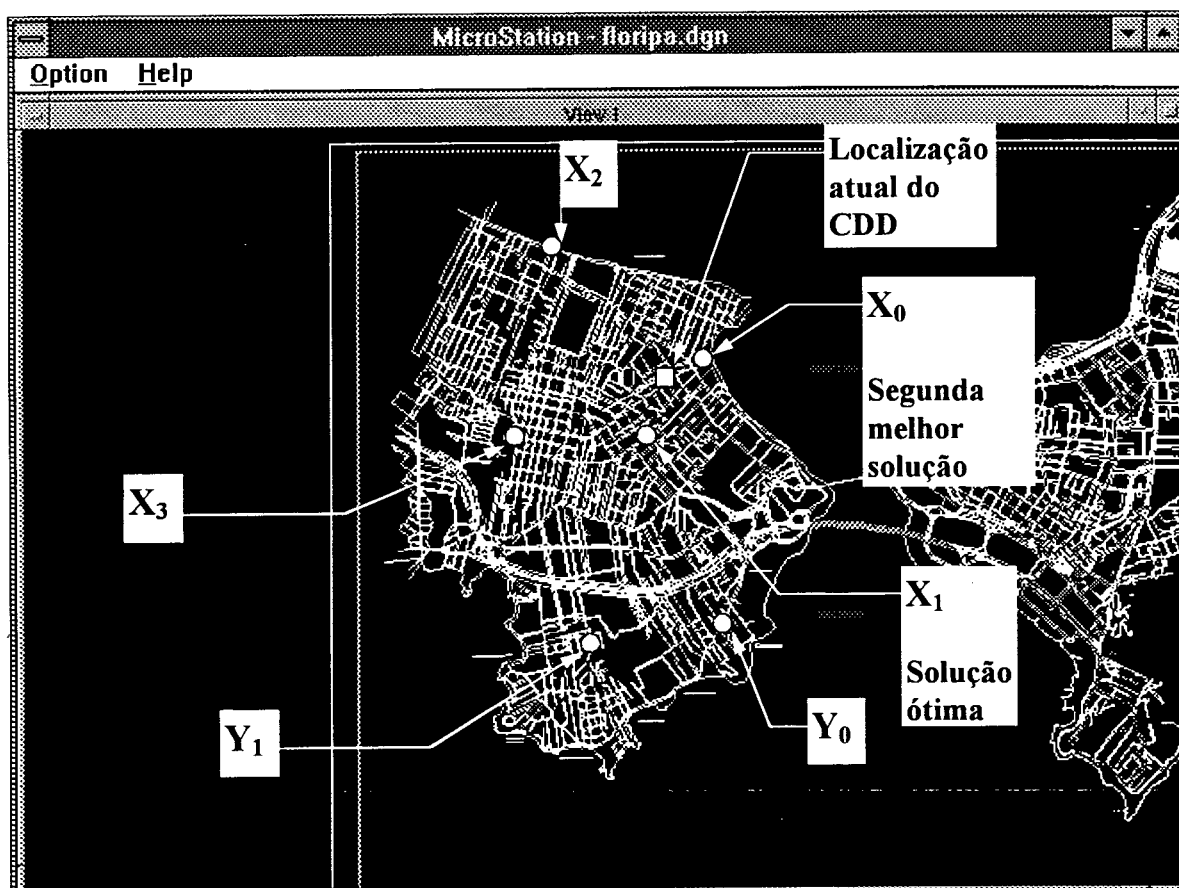
Numero de distritos alocados a x1  $\Rightarrow 19$

CEP alocado mais distante de x1  $\Rightarrow x2$

Tempo (ou distancia) maximo = 0h e 41min.

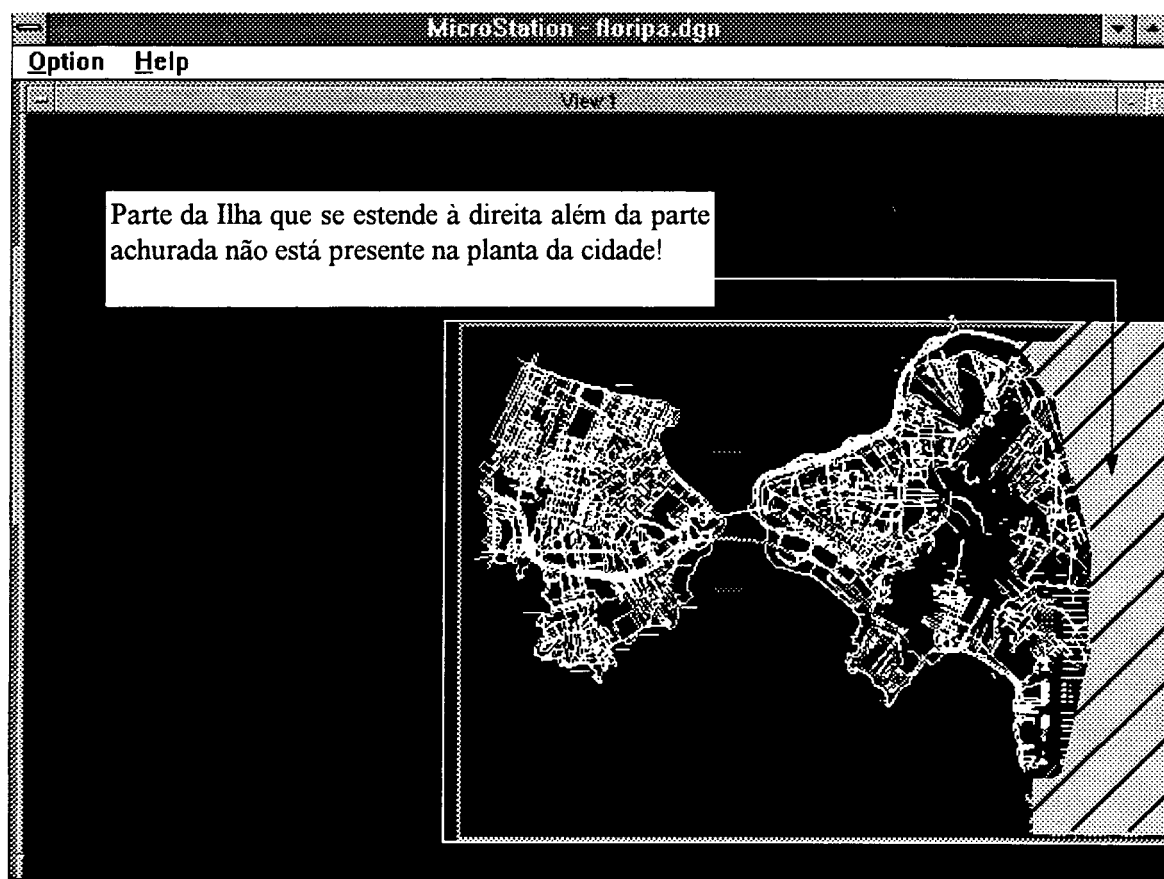
SOLUCAO OTIMA

Tela mostrando parte da cidade que corresponde ao continente com a localização atual do único CDD existente e os dois lugares  $x_1$  (a solução ótima) e  $x_0$  (a segunda melhor solução) obtidos da abordagem “Mini-sum” (P-Medianas) para a localização do CDD.



## **ANEXO-5**

Planta de logradouros da cidade em “escala reduzida”, onde a parte “achurada” representa a parte da Ilha cujas regiões de entrega estão faltando.



**ANEXO-6**

Relação atual dos CDDs com com suas respectivas circunscrições, isto é, os CEPs  
com seus distritos!

**CDD/FNS - CENTRO**

CEP 88010 - DISTRITOS: 101 a 108  
CEP 88015 - " : 151 a 158  
CEP 88020 - " : 201 a 208

**CDD/FNS - NORTE**

CEP 88025 - DISTRITOS: 251 a 253  
CEP 88030 - " : 301 a 304  
CEP 88035 - " : 351  
CEP 88036 - " : 361 a 364  
CEP 88037 - " : 371 a 372  
CEP 88050 - " : 501 a 502  
CEP 88053 - " : 531  
CEP 88054 - " : 541  
CEP 88056 - " : 561  
CEP 88058 - " : 581 a 582  
CEP 88062 - " : 621 a 622

**CDD/FNS - SUL**

CEP 88040 - DISTRITOS: 401 a 403  
CEP 88045 - " : 451 a 452  
CEP 88047 - " : 471 a 473  
CEP 88048 - " : 481  
CEP 88049 - " : 491  
CEP 88063 - " : 631  
CEP 88064 - " : 641 a 642  
CEP 88066 - " : 661

**CDD/ESTREITO**

CEP 88070 - DISTRITOS: 701 a 705  
CEP 88075 - " : 751 a 753  
CEP 88080 - " : 801 a 804  
CEP 88085 - " : 851 a 853  
CEP 88090 - " : 901 a 903  
CEP 88095 - " : 951 a 953



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Andrade, Manuel Caetano Queiroz de.: "A CRIAÇÃO NO PROCESSO DECISÓRIO" ,LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS S.A., Rio de Janeiro, 1980.
- [2] Beasley, J. E.: "A note on solving large p-Median", European, J. of Operational Research 21, p. 270, 1985.
- [3] Berman, Oded: "The p maximal cover - p partial center problem on networks", European Journal of Operational Research, no. 72, p. 432-442, North-Holland, 1994.
- [4] Christofides, N.: "Graph Teory, an Algorithmic Approch", Academic Press, New York, 1975.
- [5] Christofides, N. and Beasley, J. E.: "A tree searches algorithm for p-Median Problem", European J. of Operational Research, 10, p. 196, 1982.
- [6] Church, R. L., e Revelle, C.: "The maximal covering location problem", Papers Regional Science Association, no. 32, p. 101-118, 1974.
- [7] Church, R. L., e Meadows, M. E.: "Location modelling using maximum service distance criteria", Geograph. Anal., no. 11, p. 358-373, 1979.
- [8] Daganzo, C. F.: "The distância traveled to visit N points with a maximum of C stops per vehicls: An alytic Model and Appication", Transportation Sciencs, Vol. 18, no. 4, pp 331- 350, nov.1984.
- [9] Daganzo, C.F.: "The Length of Tours in Zones of Different Shapes", Transportation Research, (B), Vol. 18 B, no. 2, pp 135-145, 1984.
- [10] Eilon, S.; Gandy, W. and Christofides, N.: "Distribution manegement: Mathematical modeling and Practical analysis", Hafner Publishing Company, New York, 1971.
- [11] Fulton, M.: "News Factors in Plant Location", Harvard Business Review, p. 4-17, 1971.
- [12] Garfinkel, R. S. e G. L. Nemhauser: "The Set Partitioning Problem: Set Covering with Equality Constraints", Operating Research, V. 17, p.848-8856, 1969.

- [13] Goldman, A. J.: "Optimal Center Location in Simple Networks", Trans. Sci, no. 5, p. 212-221, 1971.
- [14] Goldman, A. J.: "Minimax Location of a Facility in a Network", Trans. Sci, no. 6, p. 407-418, 1972..
- [15] Gupta, S. K. e Punnen, A. P.: "Group centre and group median of a network", European Journal of Operational Research, no. 65, p. 94-97, North-Holland, 1989.
- [16] Gupta, S. K. e Punnen, A. P.: "Group centre and group median of a tree", European Journal of Operational Research, no. 65, p. 400-406, North-Holland, 1993.
- [17] Hakimi, S. L.: "Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph", Ops. Res., 12, p. 450 - 459, 1964.
- [18] Hakimi, S. L. and Maheswari S. M.: "Optimum Locations of Centers in Networks", Opns, Res. 20, pp. 967-973, 1972.
- [19] Hakimi, S. L.: "Optimum distribution of Switching Center in a Communication Network and some related Graph Theoric Problems, Opns. Res., vo. 13, p. 462, 1985.
- [20] Hall, Randolph W.: "Heuristics for selecting facility locations", Logistics and Transportation Review 21, pp. 353-373, 1985.
- [21] Han, Anthony F. W. and Daganzo Carlos F.: "Distributing Nostorable Items Without Transshipments", Transportation Research Record 1061, pp. 32-41, 1986.
- [22] Jarvinen, P; Rajala J. and Sinervo H.: "A branch and bound algorithm for seeking the p- median", Ops. Res. 20, p. 173, 1970.
- [23] Kuhn, H. W. and Kuenne: "An Efficient Algorithm for the Numerical Solution of the Generalized Weber Problem in Spatial Economics", Journal of Regional Science, Vol. 4, no. 2, pp. 21-33, 1962.
- [24] Larson, R. and Odoni, A.: "Urban Operations Research", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nj., 1981.
- [25] Leite, José Alfredo Américo: "Metodologia de Elaboração de Teses", Edit. Mc. Graw-Will, São Paulo, 1978.

- [26] Minieka, Edward: "The Centers and Medians of a Graph", *Ops. Res.* Vol. 25, no. 4, p. 641-650, July-August, 1977.
- [27] Binfaré Neto, José: "Método para Localização de uma Sede Móvel na Realização de Inventário Florestal", Dissertação de Mestrado-Engenharia de Produção, no. ,UFSC-BU, Dezembro de 1993.
- [28] Novaes, Antônio Galvão: "Considerações sobre o processo de zoneamento na distribuição física de produtos", Escola Politécnica da USP
- [29] Novaes, Antônio Galvão: "Relações Métricas e Aproximações em Redes Logísticas", VII ANPET, Congresso de Ensino e Pesquisa em Transportes, p. 22-26, Novembro, São Paulo, 1993.
- [30] Novaes, Antônio Galvão: "Sistemas Logísticos: Transporte, Armazenagem e Distribuição Física de Produtos", Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1989.
- [31] Novaes, Antônio Galvão e Rossetto, Cássio Fernando: "Localização de depósitos numa rede logística com auxílio de GIS", p. 606-606.
- [32] Palermo, F. P.: "A Network Minimization Problem", *I.B.M. Journal of Research and Development*, V.5, p. 335-337, 1961.
- [33] Pizzolato, N. D. "A Heuristic for Large-Size p-Median Problems with application to school location", Depto. de Engenharia Industrial, PUC-RJ, 1991.
- [34] Rabuske, Márcia Aguiar: "Introdução à Teoria dos Grafos", Editora da UFSC, Florianópolis-SC, 1992.
- [35] Rosenfield, Donald B.; Engelstein, Israel and Feigenbaum David: An application of sizing service territories - Case Study 3: US Postal Service, U.S.A. " , *European Journal of Operational Research*, p. 164-172, nov./1993.
- [36] Slater, Peter J.: "On locating a facility to service areas within a Network", *Operations Research Society of America*, p. 523-531, nov./1980.
- [37] Teitz, Michael B. and Bart, Polly: "Heuristic Methods for Estimating The Generalized Vertex Median of a Weighted Graph", *Ops. Res.*, 16, p. 955-961, 1968.
- [38] Weiskamp, Keith: "TURBO PASCAL 6.0", Editora LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS LTDA, Rio de Janeiro, 1992.